Mathematische Sätze als Normen der Darstellung

Abhandlung
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der
Universität Zürich

vorgelegt von
Anne-Katrin Schlegel

Angenommen im Frühjahrssemester 2015
auf Antrag der Promotionskommission:
Prof. Dr. Hans-Johann Glock (hauptverantwortliche
Betreuungsperson)
Prof. Dr. Felix Mühlhölzer

Zürich, 2017

Danksagungen

Als erstes und vor allem danke ich meinem Doktorvater Hanjo Glock. Er hat meinem Dissertationsprojekt von Anfang an Vertrauen entgegen gebracht und mit seinem Namen und praktischer Hilfe dessen Finanzierung überhaupt erst ermöglicht. Von seiner intensiven Betreuung haben ich immens profitiert. Besonders wertvoll waren dabei die vielen Diskussionen und Kommentare zu meinen Texten, aus denen ich nicht nur inhaltlich, sondern insbesondere auch methodisch viel gelernt habe (wie mir bei der Durchsicht alter Texte beim Zusammenschreiben der Arbeit eindrücklich klar geworden ist). Und nicht zuletzt bin ich dankbar für seine verlässlichen Ermutigungen nach den gelegentlichen Rückschlägen während der Verfassung dieser Arbeit.

Felix Mühlhölzer danke ich herzlich für seine Bereitschaft, als Zweitgutachter zu fungieren und sein extrem wertvolles und detailliertes Feedback zu meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt dem *Schweizerischen Nationsfonds* für dessen finanzielle Unterstützung in Form einer dreijährigen Projektförderung für meine Dissertation sowie der Förderung des einjährigen Forschungsaufenthaltes am *Department of Philosophy* der *University of Reading*.

Weiterhin danke ich Susanne Huber, Scott Normand, John Preston, und ganz besonders Severin Schroeder für sehr hilfreiche Kommentare zu früheren Fassungen verschiedener Kapiteln dieser Arbeit und für inspirierende Diskussionen. Esther Ramharter gilt mein Dank für ihre Einladung mein Kapitel 8 im Logikcafé in Wien vorzustellen sowie ihr wertvolles und anregendes Feedback und Joachim Schulte für seine großzügige Hilfe bei Fragen zu Wittgensteins *Nachlass*.

Für Fehlerkorrekturen teilweise in „letzter Minute“ danke ich Christoph & Ursel Schlegel, Hannes Sommer, Sarah Tietz und Sebastian Wyss.

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung **1**

1 Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik **3**

1.1 Wittgensteins Methode: Funktion mathematischer Sätze verstehen . . . 5

1.1.1 Sprache als Spiel nach den Regeln der Grammatik 5

1.1.2 Wittgensteins normative Auffassung von Notwendigkeit . . . 6

1.1.3 Die Gebrauchsauffassung der Bedeutung 7

1.1.4 Philosophische Probleme lassen sich über eine Klarlegung der Grammatik auflösen 8

1.2 Mathematische Sätze sind grammatische Sätze 8

1.2.1 Vorzüge dieser Mathematikauffassung 11

2 Philosophie der Mathematik zwischen Platonismus und Empirismus **13**

2.1 Empirismus als Alternative 14

2.2 Nach dem Leerlaufen der Grundlagenkrise: Rückkehr des Empirismus in der Philosophie der Mathematik? . . 17

2.3 Naturalismus 21

2.3.1 Quine über Mathematik 25

2.3.2 Probleme dieser Mathematikauffassung 27

2.4 Philosophie der mathematischen Praxis 30

2.4.1 Unzulänglichkeiten der grundlegungsorientierten Philosophie der Mathematik 31

2.4.2 Die Anfänge: Kitcher und Lakatos 34

2.4.3 Aktuelle Entwicklungen 40

3 Wittgenstein als Alternative **43**
3.1 Warum wird Wittgenstein in der Philosophie der Mathematik so wenig diskutiert? 44
3.2 Ziele der Arbeit 46
3.2.1 Fehlinterpretationen 47
3.2.2 Baustellen im *Nachlass* 49
3.3 Aufbau der Arbeit 50

II **55**

4 Die Quelle zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik **57**
4.1 Die Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik 57
4.2 Der „unveröffentlichte“ *Nachlass* 58
4.3 Weitere Quellen 61

5 Begriffserläuterungen und Terminologie **63**
5.1 Mathematische Wort-Symbol Ketten 63
5.2 Mathematische Beweise 66

III **69**

6 Mathematik und Regelfolgen **71**
6.1 Problemstellung 71
6.1.1 Mathematik und Regelfolge-Überlegungen aus exegetischer Sicht 71
6.1.2 Mathematik und Regelfolge-Überlegungen in der Debatte 75
6.2 Wittgensteins Regelbegriff 79
6.2.1 Regeln und Regelfolgen 79
6.2.2 Regel vs. Regelausdruck 82
6.3 Vollblütiger Konventionalismus? 83
6.3.1 Dummetts Interpretationsthesen 85
6.3.2 Wittgensteins Kritik an traditionellen Auffassungen vom Regelfolgen 86
6.3.3 Regelskeptizismus? 89

6.3.4 Die Beziehung zwischen einer Regel und ihrer korrekten Verwendung ist intern 93
6.3.5 Inwiefern Regeln uns nicht zwingen 95
6.3.6 Eine Sache der Entscheidung? 99
6.4 Welche Rolle spielen Regelausdrücke? 103
6.4.1 Regelausdrücke in der höheren Mathematik . . 105
6.4.2 Sind Regelausdrücke extensional definiert? . . . 108
6.5 Rolle der Praktiken 110
6.5.1 Praxis statt Deutung? 110
6.5.2 Lebensformen als »Grundlagen« für regelgeleitete Tätigkeiten 115

7 Mathematik und Empirie 117
7.1 Problemstellung 118
7.2 Bewährung und Gültigkeit 119
7.2.1 Empirische Gegebenheiten tangieren Brauchbarkeit mathematischer Sätze, nicht deren Gültigkeit 119
7.2.2 *Warum* die Gültigkeit mathematischer Sätze von der Empirie unabhängig ist 123
7.2.3 Mögliche Einwände und Erwiderungen 127
7.2.4 Zwischenresumée 131
7.3 Wie weit reicht der Einfluss der Empirie? 132
7.3.1 Empirie bestimmt, welche Regeln möglich sind? (Steiners Interpretation) 133
7.3.2 Inhalt der Mathematik wird von empirischen Gegebenheiten angeleitet und begrenzt, aber nicht vorherbestimmt 134

8 Sinn und Beweis mathematischer Sätze 141
8.1 Problemstellung 142
8.1.1 Der Zusammenhang zwischen Sinn und Beweis bei Wittgenstein 142
8.1.2 Inkompatibilitäten zwischen SdB-These und mathematischer Praxis 146
8.1.3 Die SdB$^{(*)}$-These und Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung 150

8.1.4 Ziel und Vorgehen 152
8.2 Die SdB-These und die Gebrauchsauffassung der Bedeutung: Wittgensteins Optionen 154
8.2.1 Die Verwendung mathematischer Sätze in *empirischen* und in *mathematischen* Sprachspielen . 155
8.2.2 Bestimmt der Beweis die Verwendung des Satzes als Regel? 158
8.3 Die SdB$^{(*)}$-These beginnt zu wackeln 167
8.3.1 Zur Idee, der Beweis bestimme den Ort des mathematischen Satzes in einem System von mathematischen Sätzen 170
8.3.2 Zur Frage inwiefern sich mathematische Vermutungen doch verstehen lassen 172
8.4 Die Alternative: Aufgabe der SdB*-These 174
8.4.1 Welche Zusammenhänge zwischen Sinn und Beweis bleiben? 175
8.4.2 Schroeders Einwand 177
8.5 Kompatibilität der Alternative mit der mathematischen Praxis 181
8.6 Fazit 183

9 Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit 185

Abkürzungen

Sofern nicht anders angegeben, werden die Buchpublikationen aus Wittgesteins *Nachlass* nach der Werkausgabe in acht Bänden, Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 1984 zitiert.

Buchpublikationen aus Wittgensteins *Nachlass*

BB	*The Blue and Brown Books*, Oxford: Blackwell, 1958
BGM	*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Werkausgabe, Bd.6
PB	*Philosophische Bemerkungen*, in: Werkausgabe, Bd.2
PG	*Philosophische Grammatik*, in: Werkausgabe, Bd.4
PPF	*Philosophie der Psychologie – Ein Fragment*, in: Hacker & Schulte 2009
PU	*Philosophische Untersuchungen*, in: Werkausgabe, Bd.1
ÜG	*Über Gewißheit*, in: Werkausgabe, Bd.8
Z	*Zettel*, in: Werkausgabe, Bd.8

Vorlesungsmitschriften und Gespräche

AWL	*Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1932-1935.* Nach Aufzeichnungen von A. Ambrose & M. MacDonald, hrsg. von A. Amborse, Oxford: Blackwell, 1979
LFM	*Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics.* Cambridge 1939. Nach Aufzeichnungen von R.G. Bosanquet, N. Malcolm, R. Rhees & Y. Smythies, hrsg. von Cora Diamond, Hassocks: Harvester Press, 1976
WWK	*Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis. Gespräche, aufgezeichnet von Friedrich Waismann*, in: Werkausgabe, Bd.3

Wittgensteins *Nachlass*

BEE	*Bergen Electronic Edition*, Oxford: Oxford University Press, 2000

Stellen aus Manu- und Typoskripte aus Wittgensteins *Nachlass*, die nicht nicht in einer der Buchpublikationen aus dem *Nachlass* veröffentlicht sind, werden mit MS bzw. TS, Nachlassnummer, Seitenzahl gemäß den Angaben in der *BEE* zitiert.

Teil I

Einleitung

Das piédestal, auf welchem die Mathematik für uns steht, hat sie vermöge einer bestimmten Rolle, die ihre Sätze in unseren Sprachspielen spielen.

L. Wittgenstein
(BGM VII §6)

Kapitel 1

Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik

Mathematische Sätze gelten im Unterschied zu empirischen Sätzen als erfahrungsunabhängig, zeitlos und apodiktisch gewiss. Aufgrund dessen wird der Mathematik wird seit jeher eine Art Königsstellung innerhalb der Wissenschaften zugeschrieben, oder zumindest eine Sonderstellung eingeräumt. Der *Philosophie der Mathematik* kommt in Zuge dessen eine Bedeutung zu, die über die reine philosophische Betrachtung einer Einzelwissenschaft hinaus geht: Viele aus philosophischer Sicht ebenso interessante wie klärungsbedürftige und oftmals problematische erscheinende Schlüsselbegriffe, wie Wahrheit, Notwendigkeit, Apriorität, Abstraktheit, Analytizität, Deduktion etc. spielen in den üblichen Charakterisierungen und Vorstellungen von Mathematik eine zentrale Rolle. Sie ist deshalb ein interessanter Prüfstein für die philosophische Klärung oder Ablehnung dieser Schlüsselbegriffe. Manche Philosophen sahen die Mathematik und die Logik in Sachen Präzision und Unanfechtbarkeit der Ergebnisse gar als Vorbild für die Philosophie und es ist in philosophischen Debatten sehr üblich, mathematische Sätze ohne Weiteres als Beispiel für vom Menschen und von der physikalischen Welt unabhängige, ewige Wahrheiten zu verwenden. Andere, insbesondere metaphysikkritische Philosophen sahen sich durch das Phänomen Mathematik vor Herausforderungen gestellt und haben versucht den Sonderstatus mathematischer Sätze zu relativieren, indem sie dafür argumentiert haben, dass mathematisches Wissen doch in der ein oder anderen Weise als analog zum weniger problematisch erscheinenden naturwissenschaftlichen Wissen aufzufassen ist.

Wittgenstein entwickelt in seiner späten Philosophie der Mathematik eine völlig neue Idee, den besonderen Status mathematischer Sätze zu begreifen, die eine sehr interessante Alternative, jenseits platonistischer (die den Sonderstatus mathematischer Sätze darüber erklären, dass sie von Abstrakten Objekten handeln) und empirischen Positionen (die ihn zu relativieren versuchen) bietet.

In dieser aus drei Kapiteln bestehenden Einleitung der Arbeit werde ich zunächst, in diesem Kapitel, Wittgensteins Position in ihren Grundzügen darstellen. Dann werde ich, in Kapitel 2 einen Überblick über aktuelle Debatten in der Philosophie der Mathematik geben, insbesondere im Hinblick auf eine vermehrt Hinwendung zu in einem weiten Sinne empiristischen Positionen seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts, und dabei zeigen, warum Wittgensteins Position eine interessante Alternative offeriert. Trotzdem spielt diese Alternative in aktuellen Debatten der Philosophie der Mathematik eine sehr geringe Rolle. In Kapitel 3 werde ich darstellen, was die systematische Berücksichtigung dieser Alternative bisher behindert hat. Einige aus meiner Sicht wesentliche Hindernisse *auszuräumen*, wird dann das *eigentliche Ziel* dieser Arbeit sein.

Die zentralen Ideen aus Wittgensteins später Philosophie der Mathematik sind meiner Auffassung nach folgende:

- Mathematische Sätze sind von Menschen u.a. nach Nützlichkeitsaspekten kreierte sprachliche Normen der Darstellung für empirische Sachverhalte.

- Die Notwendigkeit mathematischer Sätze lässt sich über ihre normative Funktion erklären.

- Als sprachliche Normen der Darstellung gehören mathematische Sätze zu unserem bewährten Gerüst an sprachlichen Instrumenten zur Beschreibungen von empirischen Sachverhalten. Dies erklärt einerseits die Anwendbarkeit der Mathematik im Alltag und in den Wissenschaften und andererseits die Autonomie der Mathematik gegenüber der Empirie.

Um diese Ideen zu verstehen, sind einige Hintergründe aus Wittgensteins Spätphilosophie nötig. Diese Hintergründe werde ich im Folgenden kurz darstellen und zugleich einige halb-technische Terme Wittgensteins einführen, die in der Arbeit verwendet werden. Dabei werde ich mich hier zunächst auf das Nötigste beschränken.[1] In den Kapiteln 6 und 7 werden dann weitere für die Arbeit wichtige Aspekte zu Wittgensteins Regelbegriff und zum Verhältnis von Mathematik und Empirie im Detail erläutert.

1.1 Wittgensteins Methode: Funktion mathematischer Sätze verstehen

Wichtig ist zunächst einmal der methodische Zugang, über den Wittgenstein seine Mathematikauffassung entwickelt. Der Schlüssel zu einem adäquaten Verständnis von Mathematik liegt für ihn nicht in der Klärung der Ontologie mathematischer „Objekte“ oder unseres epistemischen Zugangs zu diesen, sondern in der systematischen Rolle, die mathematische Sätze und Ausdrücke innerhalb unserer Sprache spielen.

1.1.1 Sprache als Spiel nach den Regeln der Grammatik

Hierbei ist Sprache im Sinne der Sprachauffassung aus seiner späten Phase zu verstehen, die in folgender Bemerkung besonders prägnant zum Ausdruck kommt: „Das Folgen nach der Regel ist am GRUNDE unseres Sprachspiels“ (BGM VI §28).

Sprache ist für Wittgenstein wesentlich eine regelgeleitete menschliche Praxis. Wie ein Spiel hat eine Sprache, oder auch einzelne Teile der Sprache, konstitutive Regeln, die die zulässigen Verwendungsweisen von Wörtern und auch Sätzen festlegen und so die Sprache bzw. einzelne *Sprachspiele* definieren.[2]

---

[1] Zur Ergänzung vgl. Glock 1996, Kapitel „grammar“, „language-game“, „form of representation“ und „philosophy“.

[2] Wittgenstein spricht von der *gesamten Sprache* als unserem „Sprachspiel“ (ÜG §§555-59). Er bezeichnet aber auch einzelne, durch spezielle Regeln konstituierte

Im Fall der Sprache nennt Wittgenstein dieses System von Regeln, zusammen mit den Regeln der Syntax, *Grammatik* und die einzelnen Regeln *grammatische Regeln*. Sätze, die für die *Semantik* konstitutive Regeln ausdrücken heißen bei ihm *grammatische Sätze*. Während grammatische Sätze Regeln der Sprache bzw. eines Sprachspiels ausdrücken, entsprechen *empirische* Sätze den *gültigen* Zügen *innerhalb* des Sprachspiels.

Zweierlei gilt es in Bezug auf Wittgensteins Begriff der Grammatik zu beachten: Zum einen umfasst Grammatik bei Wittgenstein damit nicht nur schulgrammatische bzw. syntaktische Regeln, sondern auch semantische Regeln, vor allem Bedeutungserklärungen. Zum anderen hängt, ob ein Satz eine grammatische Regel ausdrückt, nicht von seiner Form ab, sondern von seiner *Funktion*. Entscheidend ist, ob der Satz als Regel *verwendet* wird. So teilen beispielsweise die Sätze „Jeder Stab hat eine Länge“ oder „Weiß ist heller als schwarz“ die Form empirischer Aussagen, drücken aber tatsächlich Standards aus, nach denen wir die Wörter Stab und Läge, schwarz und weiß, hell und dunkel verwenden. Es ergibt keinen Sinn davon zu sprechen, dass „dieser Stab keine Länge hat“ oder zu sagen: „Mein neues Auto ist weiß; es ist dunkler als das schwarze von Herbert.“ Von einem Stab zu sprechen, *heißt* von etwas zu sprechen das eine Länge hat. Wer etwas anderes behauptet, hat die *Bedeutung* des Wortes nicht verstanden (PU §251).

1.1.2 Wittgensteins normative Auffassung von Notwendigkeit

Grammatische Regeln ziehen als konstitutive Regeln des Sprachspiels die Grenzen zwischen zulässigen und unzulässigen Äußerungen, d.h. zwischen Sinn und Unsinn. Sie sind daher *a priori*. Einen Satz wie „Jeder Stab hat eine Länge.“ lässt sich nicht mit der Realität abgleichen; er legt fest, wie wir den Begriff Stab verwenden. Wir können uns nicht vorstellen, was ein Stab ohne Länge überhaupt sein soll. Gram-

Teile der Sprache als Sprachspiel. Diese speziellen Sprachspiele können einander überlappen oder eines in ein anderes eingebettet sein. Und Sätze, die in einem Sprachspiel eine bestimmte Funktion haben (z.B. diejenige einer Regel des Spiels) müssen als Teil eines anderen Sprachspiels nicht unbedingt dieselbe Funktion haben (sondern können dort z.B. als empirische Aussage fungieren).

matische Sätze können deshalb auch nicht an der Realität scheitern. Die Grammatik ist „vor“ einer jeden Entsprechung mit der Realität; sie geht der Unterscheidung zwischen „wahr“ und „falsch“ logisch voraus (BGM I §156).

Sofern man von der „Wahrheit“ grammatischer Sätze sprechen möchte, besteht diese in dem Umstand, dass grammatische Sätze *gültige* linguistische Regel ausdrücken und deshalb innerhalb des Sprachspiels nicht bestreitbar sind. Und in dieser *Unbestreitbarkeit* liegt zugleich ihre *Notwendigkeit*.

Wittgenstein erklärt die Notwendigkeit und Unbezweifelbarkeit grammatischer Sätze also über deren normative Funktion; darüber, dass sie als der empirischen Betrachtung logisch vorausgehende Regeln der Darstellung die Grenzen zwischen Sinn und Unsinn ziehen.

1.1.3 Die Gebrauchsauffassung der Bedeutung

Zu den Grundpfeilern von Wittgensteins Sprachauffassung in seiner Spätphilosophie gehört ferner, eng verbunden mit der Auffassung der Sprache als regelgeleitete Praxis, seine *Gebrauchsauffassung der Bedeutung*: „Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.“ (PU §43) Im Allgemeinen lernen wir die Bedeutung von Wörtern nicht, indem wir lernen, worauf sie sich beziehen – manche Wörter werden darüber hinaus überhaupt nicht verwendet, um sich auf „etwas“ zu beziehen. Wir lernen meist, wie Wörter innerhalb von Sätzen funktionieren, die ihrerseits in einem System von anderen Sätzen, von möglichen Fragen und Antworten und Anschlusshandlungen stehen; wir lernen die Bedeutung von Wörtern, indem wir lernen, sie richtig zu verwenden. Und ein Wort (oder einen Ausdruck) zu verstehen, heißt dementsprechend, es adäquat verwenden zu können. Ferner ist uns der Sinn eines *Satzes* nicht allein über die Bedeutungen seiner Teilausdrücke und derer Kombinationsweise gegeben. Einen Satz zu verstehen, heißt vielmehr zu wissen, welcher Zug mit ihm in einem speziellen Sprachspiel gemacht werden kann; d.h. welche Rolle bzw. Funktion ihm in bestimmten Sprachspielen zukommt. Letzteres mag ein Verständnis der Bedeutung der Satzkomponenten und ihrer Kombinationsweise voraussetzen, aber dies allein reicht nicht, um den Satz zu verstehen. Man muss ferner wissen, wie der Satz im jeweiligen Kontext seiner Äußerung verwendet wird (PU §§23, 199, 421).

1.1.4 Philosophische Probleme lassen sich über eine Klarlegung der Grammatik auflösen

Wittgensteins Auffassung nach entstehen *philosophische Probleme* aus begrifflichen Verwirrungen bzw. unerkannten Verletzungen der Grammatik. Die zentrale Strategie seiner Philosophie liegt deshalb darin, solche Verwirrungen durch eine Klärung, eine übersichtliche Darstellung der Grammatik der beteiligten Begriffe und Sätze auflösen: „Diese Rolle [von Wörtern und Sätzen in unseren Sprachspielen] ist es, die wir verstehen müssen, um philosophische Paradoxe aufzulösen“ (PU §182). Zahlreiche Probleme der Philosophie erweisen sich so als Scheinproblem, die sich auflösen bzw. gar nicht mehr klar formulieren lassen, sobald der korrekte Gebrauch der zuvor problematisch erscheinenden Begriffe und ihre Zusammenhänge mit anderen Begriffen hinreichend verstanden sind.

Entsprechend gilt es in der Philosophie der Mathematik zu genau zu beschreiben, wie mathematische Sätze verwendet werden, wenn man ihre Sonderstellung verstehen oder als nur scheinbar vorhanden zurückweisen möchte:

> Das piédestal, auf welchem die Mathematik für uns steht, hat sie vermöge einer bestimmten Rolle, die ihre Sätze in unseren Sprachspielen spielen. (BGM VII §6)

1.2 Mathematische Sätze sind grammatische Sätze

Wittgensteins Befund bei dieser Untersuchung des Gebrauchs ist, dass mathematische Sätze zu den grammatischen Sätzen gehören (BGM III §26, §39). Im Unterschied zu empirischen Sätzen, wie „Die Katze liegt unter dem Tisch.“ funktionieren mathematische Sätze, wie z.B.

$2 + 2 = 4$ – entgegen des oberflächlichen Anscheins – nicht deskriptiv, sondern *normativ*. Sie drücken sprachliche *Regeln* aus:

> Der mathematische Satz hat die Würde einer Regel.
>
> *Das* ist wahr daran, daß Mathematik Logik ist: Sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung (BGM I §165)

Diese Regeln schließen bestimmte empirische Sätze als sinnlos aus (z.B. „Da ich genau zwei mal zwei Äpfel auf den Tisch gelegt habe, sollten dort insgesamt fünf Äpfel von mir liegen.“) und liefern Transformationsregeln für empirische Sätze (z.B. „Die Aula hat 30 Reihen mit je 30 Sitzen.“ → „In der Aula finden 900 Personen Platz.“).

In Ergänzung zu Wittgensteins eigener Darstellung werde ich in der Arbeit ferner aufzeigen, dass sich mathematische Sätze auch in ihrer Verwendung *innerhalb* der Mathematik in einem *analogen Sinne* als grammatischer Sätze auffassen lassen (Kapitel 8).

Als grammatische Sätze sind mathematische Sätze systematisch von empirischer Falsifikation ausgeschlossen und in diesem Sinne notwendig. Die Unbezweifelbarkeit mathematischer Sätze, kann so ohne Rekurs auf einen „Garanten“, eine erklärende Entität (engl. „truth maker“) für diese Eigenschaft allein aus dem Gebrauch, also aus der Praxis heraus erklärt werden. Insbesondere, kontra Empirismus und Platonismus, entsprechen mathematische Sätze als grammatische Regeln keiner *Realität*, weder einer empirischen, noch einer abstrakten.

Und als Normen der *Darstellung* (BGM VII §6) gehören sie zu den historisch gereift und bewährten Regeln gemäß denen wir empirischen Sachverhalten beschreiben. Dies erklärt die Anwendbarkeit der Mathematik im Alltag und in den Wissenschaften, ohne dabei die Autonomie der Mathematik gegenüber der Empirie in Frage zu stellen.

Mathematische Sätze unterscheiden sich von anderen grammatischen Sätzen, wie beispielsweise „Jeder Stab hat eine Länge.“ durch zwei Merkmale. Einerseits werden sie tatsächlich oft explizit verwendet, z.B. zu Begründung einer Transformation von empirischen Sätzen, während uns die Verwendungsregeln der natürlichen Sprache meist so selbstverständlich sind, dass wir beim Sprechen noch nicht mal an sie denken. Und andererseits werden sie offiziell und in einem bestimmten Verfahren eingeführt, nämlich im mathematischen *Beweis*.

Das Beweisen mathematischer Sätze ist gemäß Wittgensteins Auffassung eine kreativ-produktive Tätigkeit mit der Mathematiker unsere Sprache um die entsprechenden im Satz ausgedrückten Regeln erweitern. Sie folgen dabei bestimmten inner- oder außermathematischen Zwecken und müssen sicherstellen, dass die Regel bestimmte Passungsbedingungen zu den bereits bestehenden Regeln erfüllen.

Die soeben dargestellten zentralen Thesen aus Wittgensteins später Philosophie der Mathematik, nämlich dass (i) mathematische Sätze im Gegensatz zu empirischen Sätze eine *normative Funktion* haben und (ii) speziell als *Normen der Darstellung* für *empirische Beschreibungen* fungieren, werde ich im Folgenden als gegeben *voraussetzen* und ihrerseits nicht weiter begründen.[3]

Wie ich eingangs erwähnt habe und in Kapitel 3 der Einleitung weiter ausführen werde, liegt dass eigentliche Ziel der Arbeit darin, diese Position Wittgensteins *anschlussfähig* an die aktuellen Debatten in der Philosophie der Mathematik zu machen, und dazu werde ich einige wesentliche Vorbehalte ausräumen sowie Lücken in Wittgensteins Darstellung schließen.

Dafür, dass sich mathematische Sätze *auch innerhalb der Mathematik* als Normen der Darstellung auffassen lassen, werde ich allerdings, wie bemerkt, in Kapitel 8 argumentieren.

Eine Bemerkung zum Titel der Arbeit

Leider ist mir erst nachdem ich die Arbeit offiziell unter dem Titel *Mathematische Sätze als Normen der Darstellung* angemeldet hatte, aufgefallen, dass dieser Titel insofern missverständlich sein kann, als er suggeriert, ich wolle gerade für diese Thesen *argumentieren*, die ich im Folgenden stattdessen *voraussetze*.

Ursprünglich hatte ich diesen Titel gewählt, weil er die Alternative, die Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik, zusammen mit

[3]Für eine systematische Motivation dieser Thesen s. beispielsweise Friederich 2011.

meinen entsprechenden Ergänzungen, für die systematische Debatte offeriert, aus meiner Sicht prägnant zusammenfasst. Nun erscheint er mir auf Grund diese möglichen Missverständnisses allerdings unglücklich.

1.2.1 Vorzüge dieser Mathematikauffassung

Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik wird damit drei zentralen Desiderata gerecht: 1. Sie kann erklären, dass sich mathematische Sätze kategorisch von empirischen Sätzen unterschieden und erstere im Gegensatz zu letzteren *prinzipiell unbezweifelbar* sind; 2. Sie kann erklären, warum sich mathematische Sätze so erfolgreich in der *Beschreibung empirischer Sachverhalte* verwenden lassen; 3. Sie wird der anthropologischen Dimension der Mathematik gerecht: Das Mathematik Treiben eine kreative, von inner- und vor allem *außer*mathematischen Zwecken gelenkte menschliche Praxis. Die Mathematik ist daher einem historischen Wandel hinsichtlich Bestand, Methoden, Begriffen und leitenden Forschungsinteressen unterworfen.

In den aktuellen Debatten der Philosophie der Mathematik gibt es, wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird, keine Position, die diese drei Desiderata überzeugend zu vereinigen weiß.

Kapitel 2

Philosophie der Mathematik zwischen Platonismus und Empirismus

Die üblichste Art, den eingangs des letzten Kapitels beschriebenen Sonderstatus mathematischer Sätze gegenüber empirischen Sätzen zu erklären, ist der folgende: Im Gegensatz zu den Gegenständen der Natur sind die „Gegenstände“ der Mathematik abstrakt, d.h. nicht raumzeitlich, ewig, unzerstörbar, unabhängig vom Erkannt werden durch Mathematikerinnen und kausal inert. Diese Auffassung nennt man in der Philosophie der Mathematik *Platonismus*.

Mit dieser Erklärung sind vor allem zwei Überbrückungsprobleme verbunden: Erstens ist unklar, wie wir zu Wissen über solche Objekte gelangen können (vgl. Benacerraf 1973). Und zweitens fragt es sich, wie sich erklären lässt, dass wir die kontingenten Zusammenhänge der Natur dann in den Begriffen der Mathematik beschreiben können, wenn sich doch die abstrakten Gegenstände der Mathematik kategorial von den sinnlich wahrnehmbaren der Natur unterscheiden. Im Hinblick auf die drei am Ende des letzten Kapitels genannten Desiderata (1.2.1) liefert der Platonismus also zwar eine gute Erklärung für dem Sonderstatus und die Unbezweifelbarkeit mathematischer Sätze (1. Desideratum). Er ist aber nicht ohne Weiteres mit deren Anwendbarkeit (2. Desideratum) und, wie ich in 2.4.1 erläutern werde, mit deren anthropologischer Dimension (3. Desideratum) vereinbar. Zufriedenstellende

Erklärungen für die letzten beiden Desiderata zu finden, die mit dem Platonismus kompatibel sind, hat sich als nachhaltig schwierig erwiesen. Als Reaktion darauf, gab es immer wieder Versuche, das 1. Desideratum zumindest teilweise wieder aufzugeben und Probleme, die sich aus der Sonderstellung der Mathematik ergeben, durch zu lösen, dass man in die Mathematik in der problematisch erscheinenden Hinsicht mit den weniger unproblematisch erscheinenden Naturwissenschaften vergleicht.

2.1 Empirismus als Alternative

Dieses Muster findet sich bereits in den Anfängen der philosophischen Beschäftigung mit Mathematik. Aristoteles, der seinen Lehrer Platon mehr oder weniger als Platonisten im obigen Sinne interpretiert, setzt genau bei diesen Überbrückungsproblemen mit seiner Kritik ein und entwirft zugleich ein Gegenprogramm:[1] Die Mathematik hat es nicht mit einem eigenen Bereich selbstständiger Dinge zu tun, sondern mit denselben Dingen mit denen sich der Physiker auch beschäftigt. Der Mathematiker aber betrachtet sie unter einem bestimmten Aspekt, nämlich der Geometer, zum Beispiel, insofern sie ausgedehnt sind. Der Mathematiker betrachtet also keine Gegenstände, sondern Eigenschaften von Gegenständen. Bei seiner Arbeit sieht er aber methodisch davon ab, dass es sich um Eigenschaften von Dingen handelt; er abstrahiert. Da die Objekte der Mathematik gerade durch Abstraktion aus der Natur gewonnen werden, passt die Mathematik einerseits klarer Weise zur Natur und andererseits haben wir einfach über unsere Wahrnehmung Zugang zu den mathematischen „Gegenständen". Es besteht mithin kein Überbrückungsproblem. Der Irrtum Platons, nach Aristoteles Platoninterpretation, besteht darin, dass der Platonist diese abstraktive Natur mathematischer „Objekte" nicht erkennt, sondern von den durch Abstraktion gewonnenen Eigenschaften so redet, als handele es sich dabei selbst schon um Gegenstände.

Ganz so „einfach", wie Aristoteles sich das vorstellt, lässt sich das Problem natürlich nicht lösen. Wie dieses Abstraktionsverfahren funk-

[1] Aristoteles, Metaphysik, Buch XIII, XIV

tionieren soll, ist unklar. Dreieckigkeit in einer Konfiguration von Zweigen zu sehen o.ä. ist schließlich selbst sehr voraussetzungsreich. Hier kommt es mir jedoch nur auf die Methode an: Aristoteles versucht das Überbrückungsproblem des Platonismus dadurch zu umgehen, dass er dafür argumentiert, dass mathematische Erkenntnis doch über die vertraute Sinneswahrnehmung möglich ist.

Die wohl bekannteste und radikalste Variante eines solchen Versuchs ist zweifellos diejenige des Empiristen John Stewart Mill. Notorisch geworden ist seine Auffassung allerdings vor allem durch die beißende Kritik, die sie auf sich gezogen hat. In *A System of Logic* (Mill 1882)[2] verteidigt Mill seine empiristische These, nach der *alle* Erkenntnis und folglich auch mathematische Erkenntnis über die Sinneserfahrung gewonnen und induktiv abgesichert wird. Alle deduktiven Wissenschaften lassen sich, laut Mill, auf induktive Wissenschaften zurückführen: Die allgemeineren Sätze, aus denen die weniger allgemeinen Sätze mittels deduktiver (logischer) Schlüsse hergeleitet werden, sowie die Schlussschemata[3] selbst bedürfen jeweils ihrerseits einer Rechtfertigung. Und diese Rechtfertigung kann aus Mills empiristischer Sicht nur durch Induktion aus der Sinneswahrnehmung gewonnen werden.

Dass wir das Verfahren der Deduktion verwenden, liegt laut Mill daran, dass es trotzdem gute Gründe gibt, die zunächst induktiv gewonnene wissenschaftlichen Erkenntnis, anschließend in einem deduktiven System mit möglichst wenigen und einfachen Sätzen am Anfang darzustellen: Wenig gesicherte Induktionsergebnisse werden gewisser, so sein Argument, wenn sie sich mittels induktiv gut gesicherter Schlüsse aus induktiv gut gesicherten Sätzen ableiten lassen.

Vor diesem Hintergrund charakterisiert Mill auch mathematische Erkenntnis, namentlich die (euklidische) Geometrie und die Arithmetik, als Erkenntnis a posteriori. Beides, so Mill, sind *physikalische Wissenschaften*, deren Axiome und Definitionen *Verallgemeinerungen* von beobachteten Sachverhalten sind. Die Arithmetik handelt beispielsweise von Aggregaten, d.h. von Sammlungen konkreter Gegenstände. Zahlen bezeichnen, bzw., in Mills Vokabular, „denotieren“ solche konkreten

[2] Erstveröffentlicht 1843.
[3] Das sind für Mill die Schlussschemata der syllogistischen Logik.

Aggregate und sie „konnotieren“ die spezifischen Art und Weisen, wie sich ein solches Aggregat aus seinen Einzelteilen zusammensetzen lässt (Mill 1882, S.430).

Mills Auffassung von Mathematik als in diesem direkten Sinne aus der Erfahrung gewonnen, wird natürlich spätestens dann höchst problematisch, wenn wir an Teile der höheren Mathematik denken. Beispiele nicht-euklidischer Geometrien waren zu der Zeit als *A System of Logic* erschien zwar schon erforscht und veröffentlicht worden (erstmals 1829 von Lobatschewski), diesen Ergebnissen wurde aber zunächst kaum Aufmerksamkeit geschenkt, so dass sie Mill aller Wahrscheinlichkeit nach nicht bekannt waren. Aber er hätte sich beispielsweise schon fragen können, welche sinnlich wahrnehmbaren Objekte die imaginäre Zahlen bezeichnen.

Ungeachtet dessen sah sich aber auch allein *Mills Auffassung von Arithmetik* vehementer Kritik und gar Spott ausgesetzt, insbesondere durch Gottlob Frege. In den *Grundlagen der Arithmetik* (Frege 1884) nennt dieser u.a. folgende auf den ersten Blick durchaus berechtigt erscheinende Kritikpunkte:[4]

- Mills Definition von Zahlen funktioniert weder für große Zahlen, noch für die Zahl 0: Eine Anhäufung von 0 Kieselsteinen ist sicherlich nicht sinnlich wahrnehmbar und den Unterschied zwischen einer Anhäufung von 100.000 Kieselsteinen und einer Anhäufung von 99.999 Kieselsteinen vermögen wir auch nicht ohne weiteres erkennen.

- Es ist keinesfalls klar bzw. von der Natur vorgegeben, wie sich ein gegebenes Aggregat in Einzelteile legen lässt.

- Mill verwechselt die *Anwendbarkeit* arithmetischer Sätze mit den Sätzen selbst. Erstere ist kontingent, letztere sind es nicht: Wenn ich je zwei Volumeneinheiten verschiedener flüssiger chemischer Substanzen zusammenfüge, die mit einander reagieren und sich dann drei Volumeneinheiten Flüssigkeit im Messbecher befinden, ist damit nicht der arithmetische Satz $2 + 2 = 4$ falsifiziert, sondern die Behauptung, er ließe sich hier anwenden.

[4] Die entsprechenden Passagen finden sich in Frege 1884, §§7-11; §23

- Wir verwenden Zahlen nicht nur in Bezug auf Ansammlungen von konkreten Objekten, sondern z.B. auf solche fiktiver Objekte und, problematischer noch, auf solche von Zahlen selbst – z.B. in solchen Aussagen, wie: „Es gibt 4 Primzahlen zwischen 1 und 10." Diese Aggregate höherer Ordnung sind nicht mehr konkret in der Natur zu beobachten. Es ist nicht klar, wie Mills Ansatz den Sinn solcher Sätze erklären kann, ohne doch so etwas wie abstrakte Gegenstände annehmen.

Über lange Zeit hinweg wurde Mill Auffassung von Mathematik (bzw. Arithmetik) mit Freges Kritik als widerlegt angesehen. Empiristische Auffassungen spielten in der Philosophie der Mathematik danach praktisch keine Rolle mehr. Erst in jüngerer Zeit gibt es Stimmen, die die Angemessenheit von Freges Mill-Darstellung in Frage stellen und Mill auf Grundlage einer detaillierteren Darstellung seiner Position gegen Freges Kritik verteidigen (Kessler 1980, Kitcher 1998). Dabei wird vor allem der konstruktive Aspekt von Mills Zahl-Definition betont. Kitcher, der selbst davon ausgeht, dass wir Mathematik, zumindest zu Beginn ihrer Entwicklung, aus der Manipulation unserer physikalischen Umgebung gewinnen, meint sogar in Mill einen geeigneten Ansprechpartner für die Frage zu finden, wie sich diese Vorstellung ausbuchstabieren lässt (Kitcher 1988, 1998).

2.2 Nach dem Leerlaufen der Grundlagenkrise: Rückkehr des Empirismus in der Philosophie der Mathematik?

Nachdem Freges Versuch, die Arithmetik statt dessen auf Logik zurück zu führen, an der von Bertrand Russell aufgezeigten Antinomie im verwendeten Mengenbegriff scheitert, beginnt die sogenannte *Grundlagenkrise* der Mathematik, während der verschiedenen Versuche unternommen werden, die Mathematik auf ein ein für alle mal abgesichertes Fundament zu stellen und so die Entdeckung weiterer Antinomien auszuschließen.

Obwohl Frege mathematische Objekte als abstrakte Objekte auffasst, sind die Grundlegungsversuche ansonsten antiplatonistisch orientiert. Gemäß des *Intuitionismus* handelt die Mathematik von geistigen Konstruktionen. Und in David Hilberts *Formalismus* sind die Axiome rein formal definiert und müssen einzige dem Kriterium der Widerspruchsfreiheit genügen. Die inhaltliche Mathematik mittels derer die Widerspruchsfreiheit bewiesen werden soll, handelt von den Zeichen selbst.

Keines der drei großen Programme der Grundlagenkrise, die sich später in einen Grundlagenstreit entwickelt, vermag eine gemein hin akzeptierte Lösung vorzulegen. Hilberts Formalismus scheitert an Gödels Unvollständigkeitssätzen. Russell sieht sich in seinem eigenen Versuch, die Mathematik auf Logik zurück zu führen gezwungen, nichtlogische Axiome einzuführen. Der Logizismus spielt daraufhin vorerst praktisch keine Rolle mehr und wird erst in den frühen 80er Jahren durch Crispin Wright wiederbelebt. Auch gegen dessen sogenannten *Neo-Logizismus* ist eingewandt worden, dass das von ihm verwendete *Hume'sche Prinzip* („Hume's Principle") kein *logisches* ist. Ferner lässt sich auf diese Weise ohnehin *allenfalls die Arithmetik* logisch begründen. Die Erklärung des Sonderstatus mathematischer Sätze, die der Neo-Logizismus anbietet, bezieht also nur auf einen *sehr eingeschränkten Teil* mathematischer Sätze. Der Intuitionismus hat zwar keine mathematisch - technischen Durchführbarkeitsprobleme, er hat sich aber in der mathematischen Praxis nie durchgesetzt. Einerseits wollte man auf bewährte, intuitionistisch aber nicht zulässige Axiome und Beweisverfahren nicht verzichten und andererseits erwiesen sich die intuitionistischen Reformulierungen der zulässigen Mathematik als zu kompliziert. Auch in der Philosophie der Mathematik stellt er nur eine Außenseiterposition dar.

Innerhalb der Mathematik verläuft sich die Debatte um die Grundlegung wieder ins Leere. Bourbaki zeigen, dass sich der gesamte Bestand der Mathematik im Prinzip aus den Axiomen der ZFC-Mengenlehre herleiten lässt. Deren Widerspruchsfreiheit lässt sich zwar, wie Gödels Resultate zeigen, nicht beweisen, bisher hat die Mathematik aber gut funktioniert. Bourbaki plädieren deshalb für einen pragmatischen Optimismus. Die Frage nach den Grundlagen der Mathematik spielt danach *in der Mathematik* keine nennenswerte Rolle mehr.[5] In der *Philosophie der Mathematik* erwacht in der Folge ein erneutes Interesse am Platonismus (vgl. z.B. Gödel, Parson, Quine). Wegen der Rückführbarkeit der Mathematik auf Mengenlehre vertreten viele Philosophen nunmehr einen Platonismus bezüglich mathematischer Mengen (in der von ihnen jeweils bevorzugten Axiomatisierung).

Wie Benacerraf (1965) in einem einflussreichen Artikel zeigt, hat die Mengen-Platonistin allerdings ein Problem mit der multiplen Realisierbarkeit mathematischer Strukturen; z.B. gibt es verschiedene mengentheoretische Beschreibungen der natürlichen Zahlen. Als Antwort darauf entwickelt sich der *Strukturalismus*: Das Problem der multiplen Realisierbarkeit lässt sich lösen, wenn man Mathematik als nicht von mathematischen Gegenständen (wie z.B. Mengen), sondern von mathematischen Strukturen handelnd begreift. Die ontologischen Auffassungen dieser Strukturen entsprechen in etwa den traditionellen Auffassungen bezüglich Universalien. Gegen nominalistische Auffassungen (Benacerraf 1965, Hellman 1996) bezüglich der Strukturen wird zu Recht eingewendet, dass sich mathematische Strukturen von einer gewissen Kardinalität in der Natur nicht realisiert finden. Als Reaktion darauf wird mehrheitlich ein *ante rem* Strukturalismus vertreten (Shapiro 1997, Resnik 1997). Dieser steht vor denselben Überbrückungsproblemen, wie andere Formen des Platonismus auch: Es ist weder klar, wie wir Wissen über eine Ontologie der abstrakten Strukturen erlangen können, noch warum wir dieses Wissen in der Beschreibung der kontingenten empirischen Welt verwenden können.

So wundert es auch nicht, dass es in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts in der Philosophie der Mathematik erneut eine Hinwendung zu Positionen gibt, die man in einem weiten Sinne als *empiristisch* bezeichnen könnte; sie sehen die Mathematik und Naturwissenschaften nicht in einem Gegensatz zueinander, sondern vielmehr in einem kontinuierlichen Verhältnis oder betonen wichtige Analogien.[6]

---

[5] Ein gewisses Interesse kommt wieder auf im Zusammenhang mit Frage nach alternativen Grundlagen der Mathematik, z.B. der Kategorientheorie (Awodey 2004).

[6] Ich belasse es bewusst bei dieser unspezifischen Beschreibung und erkläre im Folgenden dann für diese einzelnen Positionen genau, worin die Analogien jeweils

Ausgelöst wird die erneute Hinwendung zum Empirismus allerdings durch zwei Ereignisse außerhalb der Philosophie der Mathematik:

(i) Im Anschluss an Quines Kritik an der analytisch-synthetisch Unterscheidung (Quine 1951) wird der von Quine entscheidend geprägte Naturalismus eine der wichtigsten philosophischen Strömungen überhaupt, insbesondere in den USA.[7]

Es stellt sich darauf hin die Frage, wie sich Mathematik in das (bzw. ein) naturalistisches Weltbild integrieren lässt.

(ii) Nach dem Erscheinen von Thomas S. Kuhns *The Structure of Scientific Revolutions* (Kuhn 1962) wird die Frage intensiv diskutiert, inwiefern die grundlegungsorientierten philosophischen Beschreibungen des Anwachsens *wissenschaftlichen* Wissens, der tatsächlichen wissenschaftlichen Praxis bzw. den Beschreibungen der Historikern nicht gerecht werden.

Dieselben Fragen lassen sich auch, wenn nicht gar insbesondere, in Bezug auf Mathematik stellen (3. Desideratum).

Wie bereits festgehalten, nehmen beide Entwicklungen ihren Ausgangspunkt nicht in der Mathematik. In beiden Fällen setzt die Beschäftigung mit Mathematik unter den entsprechenden Gesichtspunkten erst später ein. Eine Philosophie der Mathematik aus naturalistischer Perspektive entwickelt sich erst in den späten 90er Jahren. Ein größeres Interesse an historisch-soziologischen Dimensionen der Mathematik ist erst in den letzten Jahren im Mainstream der Philosophie

bestehen. Aufgrund der Unterschiedlichkeit der diskutierten Positionen haben sich alle meine Versuche vorab nach verschiedenen Hinsichten zu unterscheiden, in denen Positionen in der Philosophie der Mathematik empiristisch sein können, für die Darstellung eher als hinderlich erwiesen.

Es ist also wichtig im Folgenden zu beachten, dass ich mich mit dem Etikett „Empirismus“ nicht auf eine spezifische Position beziehe, etwa die von Mill oder von Carnap. Die Alternative „Naturalismus“ ist als Sammelbegriff für diese Positionen allerdings noch weniger geeignet, da sie einerseits tendenziell zu sehr einschränkt (auf Debatten in den USA ab 20. Jahrhundert) und sie andererseits Positionen wie den *mathematischen Naturalismus* (z.B. Maddy) umfasst, die mit empirischen Gegebenheiten oder naturwissenschaftlichen Methoden überhaupt nichts mehr zu tun haben.

[7] Vgl. hierzu auch Glock 2003, S.25: „As a result of [Quine’s] work, this conception of philosophy as science [d.h. Quines Naturalismus, s.u.] has achieved the status of orthodoxy, especially in the USA.“

der Mathematik angekommen, unter dem Label "Philosophie der mathematischen Praxis".

Im Folgenden werde ich diese neuen empiristischen Strömungen in ihren Grundzügen darstellen, zunächst in 2.3 den Naturalismus (insbesondere Quines) und dann in 2.4 die Philosophie der mathematischen Praxis (insbesondere anhand ihrer Pioniere Lakatos und Kitcher) sowie mit ihnen verbundene Probleme aufzeigen. Dabei werde ich in Bezug auf Quine dafür argumentieren, dass sich *gerade am Beispiel mathematischer Sätze* die *Überlegenheit* von Wittgensteins *Unterscheidung* zwischen notwendigen begrifflichen Zusammenhängen (als zur Grammatik gehörend) und empirischen Sätzen gegenüber Quines *Aufgabe der Unterscheidung* zwischen begrifflichen und faktischen Zusammenhängen zeigt. Bezüglich der Philosophie der mathematischen Praxis werde ich zeigen, dass sich eine angemessene Auseinandersetzung mit Wittgenstein aus den aktuellen Debatten heraus *geradezu aufdrängt*.

2.3 Naturalismus

Quine beschreibt seinen Naturalismus als „the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described“ (Quine 1981, S. 21).[8] Alle traditionellen philosophischen Fragen sind demzufolge vom Standpunkt unserer Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften, zu beantworten, denn dieser ist der beste Standpunkt, den wir zur Verfügung haben. Es gibt keine einer wissenschaftlichen Betrachtung in irgendeinem Sinne vor gelagerten philosophischen Fragen. Philosophie und Wissenschaften sitzen im selben Neurathschen Boot, dass sie auf offener See nur gemeinschaftlich Planke für Planke erneuern können. Diese These (im Folgenden: *Naturalismusthese*) wird nicht weiter verteidigt, sondern dient vielmehr als Ausgangspunkt jeder (naturalistisch) philosophischen Frage.[9] Quines Naturalismus ist also zunächst einmal ein

[8]Zitiert nach Maddy 2005.

[9]Aus Sicht einer Philosophin, die keine Anhängerin des Naturalismus ist, mag darin eine große Schwachstelle naturalistischer Ansätze stecken. Aus Sicht der überzeugten Naturalistin ist es allerdings auch gar nicht möglich, philosophisch für den Naturalismus zu argumentieren. Denn dann müsste man nicht-naturalistische Argu-

metaphilosophischer Naturalismus.

Darüber hinaus vertritt Quine aber auch einen epistemischen Naturalismus / Empirismus. Diesen entwickelt er im Anschluss an seine Kritik an dem zu der Zeit verbreiteten Empirismus des Wiener Kreises. In *Two Dogmas of Empiricism* (Quine 1951), einem der wohl einflussreichsten philosophischen Aufsätze des 20. Jahrhunderts, setzt er dieser Position einen in gewisser Hinsicht noch radikaleren Empirismus entgegen.

Die zwei unzutreffenden Dogmen, auf denen der Empirismus des Wiener Kreises laut Quine beruht, sind die folgenden:

1. Theorien können in Einzelaussagen zerlegt werden, die sich je einzeln empirisch prüfen lassen („erkenntnistheoretischer Reduktionismus").

2. Die Wahrheit mancher Sätze, nämlich der analytischen, ergibt sich allein aus der Bedeutung der in ihnen verwendeten Teilausdrücke. Die Wahrheit anderer Sätze, nämlich der empirischen, beruht auf Übereinstimmung mit der Wirklichkeit.

Im Gegensatz zur Behauptung des ersten Dogmas stehen, so Quine, „[u]nsere Sätze über die äußere Realität [...] dem Tribunal der Sinneserfahrungen nicht einzeln gegenüber, sondern als ein zusammenhängendes Ganzes" (Quine 1974). Die einzelnen Aussagen sind nur „Teile eines systematischen Begriffsnetzes" (das bekannte „Web of belief"), das „als ganzes mit seinen Rändern an die Erfahrung stößt" (Ibid., S.18). Die Gesamtheit unserer Behauptungen ist ein „umwegreiches aber bequemes System [. . .], um Erfahrungen mit Erfahrungen zu verknüpfen."

mente für den Naturalismus als basal annehmen und würde damit den geforderten Primat der Naturwissenschaften unterlaufen. In dieser Hinsicht steckt der Naturalismus in einem Dilemma: Wenn man ihn argumentativ verteidigt, widerlegt man ihn zugleich (sozusagen durch performativen Widerspruch) und anderenfalls hat er (u.U.) keine Überzeugungskraft.

Wird trotzdem für den Naturalismus argumentiert, so wird häufig der unvergleichbare Erfolg der Naturwissenschaften ins Feld geführt, der sie als den zentralen Ansprechpartnerin auch in philosophischen Fragen befähigen soll. Dieses Argument vermag allerdings nicht zu überzeugen. Schließlich ist der Erfolg einer Methode in einem Bereich noch kein Garant dafür, dass sie auch in anderen Bereichen fruchtbar sein wird. Anderenfalls ließe sich mit diesem Argument beispielsweise auch dafür argumentieren, die Wirtschaftswissenschaften nach den Methoden der Teilchenphysik zu betreiben.

Das so entstehende System bzw. Netz ist durch die Erfahrung nicht etwa vollständig bestimmt, so dass es nur ein mögliches solches gäbe, sondern „unterbestimmt; aber es liefert zu gewissen gegebenen Erfahrungen gewisse andere als zu erwartende Folgen“ (Ibid., S.19). Treten die zu erwartenden Folgen nicht ein, so gehört das gesamte System auf den Prüfstand.

Danach gibt es, im Gegensatz zur Behauptung des zweiten Dogmas, weder rein empirische Sätze, die nur auf Übereinstimmung mit der Wirklichkeit beruhen: Alle unsere Sätze sind „nur auf Umwegen mit der Erfahrung verknüpft“ (Quine 1974, S.18). Noch gibt es Sätze, die allein auf Grund von Bedeutung wahr wären. Denn aufgrund der holistischen Beschaffenheit unserer Überzeugungen gilt: „Any statement can be held true come what may, if we make drastic enough adjustments elsewhere in the system. ... Conversely, by the same token, no statement is immune to revision.“ (Quine 1980, S.43)[10] Jeder Satz ist als Teil des Webs empirisch bestätigt und kann im Prinzip empirisch falsifiziert werden. De facto kommt dies einer Aufgabe begrifflicher Wahrheiten gleich: Es gibt keine kategorialen Unterschiede zwischen den verschiedenen Sätzen des „Web of belief“. Alle sind, als Teil des zusammenhängenden Ganzen, empirisch kontingent. In dieser Hinsicht ist Quines Empirismus also noch radikaler als derjenige des Wiener Kreises. Da alle Sätze nur als Teil des zusammenhängenden Ganzen bestätigt werden und diesem Ganzen allein die Sinneserfahrung gegenüber steht, vertritt Quine also einen *epistemischen* Empirismus bzw. Naturalismus.

Die Auswahl dessen, was im Web of belief bei widersprüchlicher Erfahrung geändert wird, erfolgt nach verschiedenen Prioritäten (bei Quine „theoretical virtues“ genannt), wie beispielsweise „conservatism, generality, simplicity, refutability, modesty, plus conformity with observation“ (vgl. Quine & Ullian 1970, Kapitel V).[11] Gemäß dieser Prioritäten genießen diejenigen Sätze besonderen Schutz, die sich, im Bild des Netzes gesprochen, entweder nahe des Zentrums oder an der Peripherie liegen, also entweder besonders großen oder besonders gerin-

[10] Zitiert nach (Maddy 2005).

[11] Tatsächlich ändert Quine die Liste der theoretical virtues mehrfach. Siehe dazu Maddy 2005, S.441.

gen Abstand zur Erfahrung haben. Zu ersteren zählen Sätze wie „Der Stift liegt in meiner Hand." oder: „Auf dem Tisch vor mir steht eine Tasse." Diese Sätze gilt es – vorausgesetzt natürlich, wir haben eine entsprechende Erfahrung – besonders zu schützen („conformity with observation"), um dem gesamten Netz berechtigter Weise einen empirischen Gehalt zuschreiben zu können. Zu letzteren zählen beispielsweise Naturgesetze und auch, wie ich gleich ausführlicher darlegen werde, mathematische Sätze. Solche zentrumsnahen Sätze sind in dem Sinne grundlegender für unser gesamtes Begriffsnetz als andere, dass ihre Revision zahlreiche andere Revisionen nach sich ziehen würde. Da die Maxime befolgt wird, das gesamte Netz so wenig wie möglich zu stören (gemäß der theoretical virtues „conservatism" und „generality"), gilt es auch diese Sätze besonders zu schützen. Beide Arten von Sätzen sind deshalb gleichwohl nicht unumstößlich, sondern könnten beispielsweise eine Veränderung erfahren, wenn sich daraus insgesamt eine erhebliche Vereinfachung des Netzes („simplicity") ergeben würde. Ferner können sich natürlich auch Konflikte zwischen Peripherie- und Zentrumssätzen ergeben. Die Unterschiede zwischen Sätzen des Netzes, die sich aus den theoretical virtues ergeben, sind, wie bereits betont, nicht qualitativ; sie sind graduell.

Die Existenz der in unseren Theorien vorkommenden Entitäten folgt aus der Nützlichkeit dieser Theorien und ihrer Konformität mit den theoretical virtues. Solange eine Theorie auf diese Weise zu unseren besten Theorien über die Welt gehört, sollten wir die von ihr postulierten Gegenstände als existent annehmen. Diese Forderung von Quine ist als *ontological commitment* bekannt geworden. Er argumentiert dafür wie folgt: Auf Basis unserer Sinneserfahrung haben wir nicht weniger Grund, die Existenz von beispielsweise Elementarteilchen anzunehmen, als die Existenz von Alltagsgegenständen wie, Tische, Stühle oder Tennisbälle. Denn das, was wir tatsächlich wahrnehmen, so Quine, sind „variformed and varicolored visual patches, varitextured and varitemperatured tactual feels, and an assortment of tones, tastes, smells and other odds and ends; desks are no more to be found among these data than molecules." (Quine 1976, S.250) Schreibtische und Tennisbälle sind ebenso theoretische Postulate wie Moleküle oder Higgs-Teilchen.

Wir stehen also vor der Wahl, die Existenz von beidem anzunehmen oder von beidem zu verneinen, was in Bezug auf Alltagsgegenstände für Quine absurd anmutet. Er schließt daher:

> Having noted that man has no evidence for the existence of bodies beyond the fact that their assumption helps him organize experience, we should have done well, instead of disclaiming the evidence for the existence of bodies to conclude: such, then, at bottom, is what evidence is, both for ordinary bodies and for molecules." (Quine 1976, S.251)

2.3.1 Quine über Mathematik

Wie lässt sich nun die Mathematik in dieses naturalistische Bild integrieren? Gemäß der Naturalismusthese entscheidet naturalistische Philosophie über die Zulässigkeit mathematischer Gegenstände und Methoden. Mathematik ist ein unverzichtbarer Bestandteil unserer naturwissenschaftlichen Theorien.[12] Zumindest die in unseren naturwissenschaftlichen Theorien verwendete Mathematik gehört daher zu unserem Web of belief. Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

(1) *Status mathematischer Sätze.* Da es keine qualitativen Unterschiede zwischen verschiedenen „Arten" von Sätze im Web gibt, gibt es auch keinen *qualitativen* Unterschied zwischen mathematischen und empirischen Sätzen. Im Einzelnen bedeutet das:

    (a) *Mathematische Sätze haben einen empirischen Gehalt. Mathematische Sätze sind kontingent.* Die in unseren naturwissenschaftlichen Theorien vorkommenden mathematischen Sätze sind insofern (vorläufig) bestätigt – und in dieser Hinsicht wahr – als sie Teile des insgesamt bestätigten und auch nur insgesamt bestätigbaren Webs sind. Sie sind daher, ebenso

[12] Dafür argumentiert jedenfalls Putnam (1975) und auch Quine geht davon aus. Der Versuch von Field (1980) eine Mathematik freie Physik zu formulieren, gilt hingegen gemein hin als gescheitert.

wie alle anderen Sätze im Web, immer *auch auf Grund von Erfahrung wahr*.

(b) *Mathematische Sätze sind falsifizierbar*. Auch mathematische Sätze können also im Prinzip an der Erfahrung scheitern, wie Quine explizit betont: „Selbst mathematische und logische Gesetze sind nicht vor Veränderungen geschützt." (Quine 1974, S.21) Mathematische Sätze sind – ebenso wie logische Sätze – lediglich auf Grund ihrer zentralen Stellung innerhalb des Webs besonders gut geschützt, deshalb ergibt sich der *Eindruck* von Notwendigkeit.

(2) *Ontologie*. Naturalismusthese und *ontological commitment* führen zu einem Realismus bezüglich mathematischer Objekte, sofern diese in naturwissenschaftlichen Theorien vorkommen – genauer: Nach dem Prinzip von Ockhams Rasiermesser vertritt Quine einen Platonismus bezüglich Mengenlehre, bzw. der Mengenlehre aus der sich die Mathematik herleiten lässt, die in unseren naturwissenschaftlichen Theorien verwendet wird. Dies ist das berühmte *indispensability argument* von Quine und (Putnam 1975, S.347).[13]

(3) *Revisionismus*. Nicht alle bestehenden Teile der Mathematik sind aus naturalistischer Sicht auch gerechtfertigt, sondern nur diejenigen, die in unseren wissenschaftlichen Theorien auch unabdingbar vorkommen. Das gilt beispielsweise nicht für die transfinite Mengenlehre. Solche Teile der Mathematik erweisen sich mithin als bedeutungslos: „So much of mathematics as is wanted for use in empirical science is for me on a par with the rest of science. [...] [B]ut anything further is on a par rather with uninterpreted systems." (Quine 1984, S.788)[14] Später spielt Quine mit dem Gedanken die transfinite Mengenlehre doch zuzulassen, weil sie im selben Vokabular formuliert ist, wie die unbedenklichen Teile. Diese Teile ließen sich zwar nicht empirisch bestätigen, aber zumindest über Teilhabe an anderen theoretical virtues wie Einfachheit ließen sich ihnen Wahrheitswerte zuschreiben. Auf dieser Grundlage

[13] Erstveröffentlicht 1971 bei Harper & Row (New York).
[14] Zitiert nach (Maddy 2005).

argumentiert Quine beispielsweise – entgegen der mathematischen Praxis – für das Konstruierbarkeitsaxiom.

2.3.2 Probleme dieser Mathematikauffassung

Diese Konsequenzen sind alles andere als unproblematisch.

Bezüglich (1) stellt sich die Frage, welche Art von empirischer Erfahrung zur Aufgabe eines mathematische Satzes führen können soll.[15] Während es vielleicht[16] noch Sinn ergibt davon zu sprechen, dass Axiome bzw. Axiomensysteme „aufgegeben“ werden zu Gunsten von solchen, aus denen sich für die Anwendung relevante Mathematik ableiten lässt, ist es nicht klar, wie es zu verstehen ist, dass mathematische Sätze empirisch falsifiziert werden können. Das in der Mathematik übliche Bestätigungsverfahren ist ja gerade nicht der Abgleich mit der Erfahrung, sondern der mathematische Beweis.

Quines Platonismus (bezüglich mathematischer Mengen) a posteriori (2) wirft Fragen der Überbrückung auf. Abstrakte Objekte sind, im Unterschied zu anderen theoretischen Postulaten wie z.B. Molekülen, nicht kausal wirksam in der Welt. Wie sollen ihre Existenz und unsere mathematischen Annahmen über ihre Beziehungen untereinander dann über die Erfahrung bestätigt werden? Quine hat darauf zwar eine Antwort: Sie sind, wie die Existenz aller in unseren naturwissenschaftlichen Theorien vorkommenden Entitäten und entsprechende Sätze über diese, dadurch bestätigt, *dass* sie in unseren besten naturwissenschaftlichen Theorien über die Welt vorkommen. Aber diese Antwort ist keine Erklärung, sondern ein Verweis auf eine dogmatische Setzung. Auch die Anwendbarkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften wird als gegeben *hingenommen* (bestreitbar ist sie ja auch nicht), aber nicht *erklärt*.

Der Revisionismus (3) stößt auf den erwartbaren Widerstand der Mathematikerinnen und auch der Philosophinnen der Mathematik, die

[15] Wie bezeichnender Weise auch Quines ehemaliger Mitstreiter Putnam unter Verweis auf Wittgensteins *Über Gewißheit* später an Quines und seiner ehemaligen Auffassung kritisiert (Putnam 1995).

[16] Diese Frage werde ich in 2.4.2 noch einmal aufgreifen.

sich mit den mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik beschäftigen.

Gerade die Rolle der *mathematischen* Sätze im Web of belief lässt also durchaus Fragen offen.

Auf Grund der mit (1) und (3) verbundenen Probleme entwickelt sich der *Mathematische Naturalismus* (Maddy 1997, Burgess & Rosen[17]), der dafür plädiert, die methodischen Besonderheiten der Mathematik (Beweis) ernst zu nehmen und die Mathematik u.a. auf Grund dessen nach ihren eigenen Standards zu beurteilen; die Naturalismusthese soll also auf Mathematik übertragen werden. Diese Positionen stehen wiederum vor anderen Probleme (vgl. z.B. Paseaus kritische Darstellung in Paseau 2013). Darüber hinaus vertreten mathematische Naturalisten einen Platonismus bezüglich mathematischer Mengen, womit die bereit erwähnten Überbrückungsprobleme verbunden sind. Eine kritische Auseinandersetzung mit dem mathematischen Naturalismus in seinen verschiedenen Varianten, muss hier ausbleiben. Es ist aber äußerst bemerkenswert, dass sich in Bezug auf Mathematik selbst solche Philosophen von Quine distanzieren, die sich seinem Naturalismus ansonsten „wholeheartedly" verschreiben (Maddy 2005). Das Phänomen Mathematik stellt zweifellos eine Herausforderung für Quines Naturalismus dar.

In Bezug auf (1) könnte man zumindest versuchen wie folgt gegen den Widerspruch zwischen mathematischem Bestätigungsverfahren (Beweis) und naturalistischem Bestätigungsverfahren (Abgleich mit der empirischen Erfahrung) zu argumentieren: Wenn ein mathematischer Satz im Web of belief aufgegeben wird, zieht dies entsprechende Konsequenzen nach sich. Wenn der Satz falsch ist, müssen entsprechend auch die Prämissen aus denen er im Beweis hergeleitet wird falsch sein und schließlich auch die Axiome, bzw. einzelne Axiome, die dem entsprechenden Bereich der Mathematik zu Grunde liegen (also bei Quine Axiome der Mengenlehre). Und wenn die entsprechenden Axiome falsifiziert sind, können sie auch nicht mehr als Prämissen des Beweises fungieren. Folglich wäre der empirisch falsifizierte Satz auch nicht mehr

[17]Vgl. Darstellung in Maddy 2005

beweisbar.

Dafür müsste allerdings erstmal gewährleistet sein, dass eine Aufgabe des Satzes tatsächlich auch die entsprechenden Konsequenzen innerhalb des Webs nach sich zieht. An dieser Stelle setzen die Kritiker von Quines Aufgabe der Unterscheidung zwischen begrifflichen und faktischen Zusammenhängen an, wie z.B. Glock (2003, Kapitel 3). Zunächst einmal, so argumentiert Glock, schließen Quines kritische Argumente gegen die analytisch/synthetisch Unterscheidung der logischen Empiristen nicht grundsätzlich aus, dass eine Unterscheidung zwischen faktischen und begrifflichen Zusammenhängen möglich ist. Insbesondere ist die Kritik an der Idee von Wahrheit auf Grund von Bedeutung sogar mit *Wittgensteins* Unterscheidung zwischen *empirischen* und *grammatischen Sätzen*, also solchen, die eine konstitutive Rolle für die Bedeutung von Ausdrücken spielen, kompatibel. Und eine solche Unterscheidung zwischen begrifflichen und faktischen Zusammenhängen ist eine notwendige Voraussetzung dafür, dass Quines holistisches Bild vom Web of belief überhaupt funktioniert:

> But unless certain relations had a special logical status, there would be no web of beliefs adapting to experience. For observations at the periphery would not be logically linked to theories closer to the centre, and hence could not confirm or refute them. (Glock 2003, S.93)

Dass heißt nicht, dass man an manchen Sätzen unter allen Umständen festhalten muss, etwa an logischen wie dem tertium non datur – das gesteht Quine später sogar zu. Sondern diese Sätze müssen die nötigen *internen* Verbindungen zwischen den einzelnen Aussagen stiften. Ohne solche Verbindungen bleibt es völlig unklar, welche Folgeänderungen die Änderungen einzelner Sätze nach sich ziehen und damit inwiefern die Sätze des Webs überhaupt irgendeinen Sinn haben sollen.

Darüber hinaus hätte Wittgensteins Auffassung von *mathematischen Sätzen* als zur Grammatik gehörend gegenüber Quines Aufgabe eines qualitativen Unterschieds zwischen verschiedenen Arten von Sätzen zwei weitere Vorteile: Sie vermeidet problematische ontologische Annahmen und sie kann die unterschiedlichen Verifikationsverfahren in Mathematik und Naturwissenschaften sowie die Anwendbarkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften erklären.

2.4 Philosophie der mathematischen Praxis

Im Anschluss an Kuhn findet, über die Diskussion von Kuhns Position im engeren Sinne hinaus, in der Wissenschaftsphilosophie eine Trendwende statt. Der bis dahin vernachlässigten historischen und soziologischen Dimension der wissenschaftlichen Praxis wird nun besondere Aufmerksamkeit geschenkt. In der Philosophie der Mathematik vollziehen zuerst, und zunächst eher als Einzelstreiter, Imre Lakatos (1976, 1978)[18] und Philip Kitcher (1983, 1988).

Beide, Lakatos und Kitcher, beginnen ihre Arbeit in einem Abstand von ca. 20 Jahren und auf verschiedenen Kontinenten. Das Problem, auf das sie reagieren, diagnostizieren sie trotzdem sehr ähnlich: Die bestehende, vorrangig mit Grundlegungsfragen beschäftigte Philosophie der Mathematik hat sich von dem, was Mathematiker tatsächlich tun sehr weit wegbewegt.

> Many practicing mathematicians and historians of mathematics will have a brusque reply to [what is philosophie of mathematics?]: a subject noted as much for its irrelevance as for its vaunted rigor, carried out with minute attention to a small number of atypical parts of mathematics and with enormous neglect of what most mathematicians spend most of their time doing. (Kitcher 1988, S.293, vgl. dazu auch Lakatos 1976, S.1-5)

Was Mathematiker tatsächlich tun, erscheint Lakatos und Kitcher aber wichtig zu sein zur Beantwortung der Fragen, wovon mathema-

[18] Lakatos' *Proofs and Refutations – The Logic of Mathematical Discovery.* wird erstmals 1963-4 als Artikel in *The British Journal for the Philosophy of Science* veröffentlicht. Der Einfluss seines Mentors Karl Popper wird schon am Titel deutlich. *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* ist ein nie ganz fertig gestellte Aufsatz aus dem Jahr 1967. Er erscheint posthum in einer Sammlung unveröffentlichter Texte (Lakatos et al. 1978), unter minimalen Änderungen für ein besseres Textverständnis durch den Herausgeber.

tische Erkenntnis handelt, wie wir sie erreichen können und wie sie wächst.

Sie heben wichtige und von der philosophischen Auseinandersetzung mit Mathematik bis dahin völlig vernachlässigte Aspekte hervor: Der Bestand, aber auch die Methoden und Fragestellungen der Mathematik unterliegen einem historischen Wandel und mathematische Begriffe und Axiome bedürfen einer Bewährung, um sich in der Mathematik zu etablieren. Ferner haben die Beweise, die man in der mathematischen Praxis findet, mit den formalen Beweisen der grundlegungsorientierten Philosophie der Mathematik, z.B. denen in der *Principia Mathematica*, wenig zu tun.

2.4.1 Unzulänglichkeiten der grundlegungsorientierten Philosophie der Mathematik

Hinsichtlich der Geschichtlichkeit von Mathematik stellt sich insbesondere folgendes Problem: Wenn Mathematik in einem platonistischen Sinne a priori ist, dann ist allein das Anwachsen mathematischen Wissens geschichtlich. Tatsächlich zeigt sich aber, dass die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin nicht nur in ihrem Umfang wächst, sondern auch in ihren Methoden und Fragestellungen sehr wohl einem historischen Wandel unterworfen ist. Ferner sind, wenn die eigentlichen Grundlage der Mathematik z.B. in ihrer mengentheoretischen Darstellung liegen, frühere mathematische Erkenntnisse, etwa von Pythagoras oder Leibniz, gar keine wirklichen Erkenntnisse, weil sie nicht in der richtigen Weise dargestellt wurden.

Beide, Lakatos und Kitcher, kritisieren, dass grundlegungsorientierte Philosophie der Mathematik der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik nicht Rechnung trägt und damit einen zentralen Aspekt der Mathematik unterschlägt. Mathematisches Wissen ist ein „historical product“ (Kitcher 1988, S.298) und „the philosophy of mathematics [die sich mit der mathematischen Frage nach deren Grundlagen beschäftigt], turning its back on [...] the history of mathematics, has become *empty*.“ (Lakatos 1976, S.2) Dass die grundlegungsorientierte Philosophie der Mathematik die historische Entwicklung zu Unrecht ignoriert, ist auch eine der Grundüberzeugungen der aktuellen Philosophie der mathematischen Praxis (vgl. z.B. Lavor 2008, van Kerkhove 2009).

Kitcher hebt weiterhin hervor, dass in der Mathematik, ebenso wie in anderen Wissenschaften, Komponenten wie die folgenden eine Rolle spielen: Weiterentwicklungen in der Mathematik geschehen immer vor dem Hintergrund dessen, was vorangegangene Generationen von Mathematikern erreicht haben, also von einem Stand der Praxis aus (Kitcher 1988, S.298). Zu einer solchen Praxis gehören wiederum verschiedene Aspekte, die von einer Community geteilt werden, wie eine gemeinsame Sprache, ein Set von gemeinsam akzeptierten mathematischen Sätzen, von Fragen, die als relevant erachtet werden und von akzeptierten Methoden und Beweisführungen. Auch für alle diese Aspekte findet sich im Modell des grundlegungsorientierten Philosophen der Mathematik kein Platz.

Ferner üben beide Kritik an der Unangemessenheit des Beweisbegriffs der Grundlagentheoretiker. Lakatos bemerkt dazu, dass es in einer formalisierten Mathematik nur zwei Wege zu neuer Erkenntnis gibt, die beide an der mathematischen Realität vorbei zu gehen scheinen: Entweder lassen sich aus den grundlegenden Axiomen (z.B. der Mengenlehre) mittels formalisierter Beweisverfahren neue wahre Sätze ableiten. Diese Art von Erweiterung der Erkenntnis ließe sich im Prinzip auch von einer Turingmaschine durchführen und ist, so Lakatos, weder das, was den Mathematiker interessiert, noch eine angemessene Beschreibung von dessen Tätigkeit. Oder im Fall von Fragen wie: Ist dieser Satz unentscheidbar? verhelfen nur „geniale Einsicht“ oder „Glück“ (Lakatos 1976, S.4) zur Lösung. Hier lässt sich, laut Lakatos, kritisch einwenden, dass Genialität und Glück bei neuen mathematischen Errungenschaften eine Rolle spielen mögen, ihnen in der Regel aber doch eine ganze Entwicklungsgeschichte vorausgeht. Die grundlagentheoretische Darstellung mathematischer Beweise geht daher an der Realität der mathematischen Praxis vorbei. Kitcher ergänzt, dass solche formalen Beweise ferner außer für elementare Bereiche der Mathematik gar nicht zur Verfügung stehen und außerdem auch fraglich ist, worin ihr erkenntnistheoretischer Wert bestünde: „Moreover, it is a serious epistemological question to ask *what* such derivations would do for us if we had them“ (Kitcher 1988, S.321, fn.6, meine Hvbg.).

Diese Kritik wird in der aktuellen Philosophie der mathematischen Praxis ebenfalls breit geteilt (z.B. Lavor 2008, Buldt et al. 2008). Hersh (2006, S.xi) spricht in diesem Zusammenhang gar davon, dass die Wörter „mathematischer Beweis“ eine unterschiedliche Bedeutung haben, je nach dem, ob sie in „philosophy journals“ oder von der „present-day mathematical community“ verwendet werden.

Auch Wittgenstein übt Kritik an grundlegungsorientierter Philosophie der Mathematik und kritisiert insbesondere deren formale Beweise. Im Unterschied zu Kitcher und Lakatos geht seine Kritik aber über den Verweis auf die Diskrepanz zwischen den Grundlegungsprogrammen und der tatsächlichen Praxis hinaus.

Er liefert ferner *interne Argumente* gegen die *Sinnhaftigkeit* solcher Grundlegungsprogrammen und er arbeitet Bedingungen für das Funktionieren von Beweisen heraus, die formale Beweise ab einer gewissen Komplexität nicht erfüllen.

Selbst wenn, so argumentiert Wittgenstein, Grundlegungsprogramme[19] mathematisch erfolgreich wären, sich also von der technischen Seite ohne Antinomien und Widersprüche durchführen ließen, könnten sie das angestrebte Ziel der Letztabsicherung gar nicht erreichen. Tatsächlich hätte man nämlich den verschiedenen Kalkülen der Mathematik lediglich einen neuen hinzugefügt. Mehr noch, zumindest Russells Kalkül aus den Principia Mathematica widerspricht selbst den Zwecken der tatsächlichen mathematischen Praxis (BGM III §46). Die Notation ist sperrig und unübersichtlich, obwohl wir doch in der Praxis gerade daran interessiert sind, Übersichtlichkeit zu schaffen, um die Reproduzierbarkeit und Einsehbarkeit von Beweisen zu gewährleisten. Und schließlich ist es für die Praxis vor allem wichtig, dass sich die verschiedenen Bereiche der Mathematik, die wir bereits so erfolgreich verwenden, aus dem neuen Kalkül herleiten lassen. Denn diese unterschiedlichen Aspekte sind es ja, die uns in der Praxis interessieren und die die Mathematik anwendbar machen. Wenn es aber gerade darauf

[19] Wittgenstein bezieht sich speziell auf Russells Logizismus. Wie Mühlhölzer (2010) argumentiert, lassen sich die meisten seiner Argumente aber auch auf mengentheoretische Grundlegungen der Mathematik übertragen.

ankommt, dass unterschiedliche Teile des Russell-Kalküls die verschiedenen Eigentümlichkeiten unterschiedlicher Bereiche der Mathematik aufweisen, dann könnte man ebenso gut sagen, dass die unterschiedlichen Teile des Kalküls doch wieder verschiedene Techniken verwenden. Die Idee, alle Mathematik in ein einheitliches System übersetzten zu wollen, liefert also weder die angestrebte „Grundlegung" noch passt sie zu den Zielen und Zwecken der Praxis, die Mathematik als Werkzeug und ihre Ziele in der vielfältigen Anwendung sieht und daher auf eine entsprechende Vielfalt und Übersichtlichkeit der Verfahren abzielt.

Diese Beiträge Wittgensteins zur Philosophie der Mathematik werden in meiner Arbeit allerdings nicht weiter ein Thema sein (s. statt dessen Mühlhölzer 2010 zu Wittgensteins Kritik am Logizismus und Mühlhölzer 2005 zur Übersichtlichkeit mathematischer Beweise.)

2.4.2 Die Anfänge: Kitcher und Lakatos

Während Lakatos' und Kitchers Kritik einleuchtet, vermögen die von Lakatos und Kitcher jeweils angebotenen Alternativen allerdings weniger zu überzeugen, wie ich im Folgenden darlegen werde.

Kitcher

Die Grundidee von Kitchers *naturalistic constructivism* ist, dass sich die jeweils aktuellen mathematischen Vorstellungen und Überzeugungen („our present body of mathematical beliefs") aus den vorangegangenen („prior body of beliefs") rechtfertigen lassen müssen. Die Bezeichnung naturalistic constructivism ergibt sich aus zwei Aspekten. Der Ansatz ist naturalistisch (empiristisch) (i) insofern als am Anfang dieser Kette die direkte Erfahrung steht: „Here, perhaps, we discover a type of mathematics about which Mill was right, a state of rudimentary mathematical knowledge in which people are justified through their perceptual experiences in situations where they manipulate their environments (for example by shuffeling small groups of objects)." (Kitcher 1988, S.299) Die Mathematik beginnt also damit, dass wir Gegenstände unserer unmittelbaren sinnlichen Erfahrung organisieren. Sie wird mithin (ii) nicht rein rezeptiv (wie Frege Mill, laut Kitcher, zu Unrecht unterstellt hat), sondern *konstruktiv* aus der Erfahrung gewonnen. Die

Mathematik, so fasst Kitcher seine Vorstellungen zusammen, ist eine „idealized science of human operations“ (Ibid., S.313). Diese „operations“ beziehen sich am Anfang einfach auf unsere unmittelbare Umwelt, die wir zunächst tatsächlich („either through performing crude physical manipulations“) und dann in Gedanken („or through operations of thought“) strukturieren. Die Operationen werden schließlich idealisiert („freed from various limitations of time, energy, and ability“) und dann auch selbst wieder organisiert. Letzteres ist Kitchers Erklärungsangebot für die „reinen“ Teile der Mathematik, denn in dieser Hinsicht generiert die Mathematik zumindest zum Teil ihre eigenen Inhalte („mathematics generates ist own content“ (Ibid., S.314)). Wie diese einzelnen Schritte genau funktionieren sollen, bleibt bei Kitcher allerdings etwas vage.

Damit die Kette der Übergänge zwischen den verschiedenen Stadien der Mathematik auch zu *mathematischem Wissen* führt, dürfen die Übergänge natürlich nicht beliebig sein, sondern sie müssen bestimmten Anforderungen genügen. Für Kitcher heißt das, dass die Übergänge *rational* sein müssen: „What naturalism has to show is that contemporary mathematical knowledge results from this primitive state through a sequence of rational transitions.“ (Ibid., S.299) Eine entsprechende Theorie wissenschaftlicher Rationalität zu formulieren, lässt Kitcher als offenes Problem und künftiges Forschungsziel der Philosophie der Mathematik (und anderer Wissenschaften) bestehen. Er argumentiert aber dafür, dass es eine allgemeine Theorie sein müsse, die alle wissenschaftlichen Disziplinen umfasst.

Für eine Reduktion der Epistemologie der Mathematik auf die der Naturwissenschaften sprechen für ihn die von ihm hervorgehobenen Ähnlichkeiten im Vorgehen (auch mathematische Axiome müssen sich an der Erfahrung bewähren, in der Praxis spielen dieselben Komponenten eine Rolle, vgl. Ibid., S.313). Die ja dennoch existenten Unterschiede zwischen Mathematik und Naturwissenschaften sind für Kitcher, wie für Quine, nicht prinzipieller, sondern *gradueller* Natur: „there is a continuum of cases“ (Ibid., S.301; dies ist allerdings ein anderes Kontinuum als dasjenige von Quine). Sie haben damit zu tun, wie sehr die Übergänge nur aus der vorgängigen Praxis heraus („internal transitions“) oder durch externe Faktoren, z.B. Erfahrungen motiviert sind („external transitions“). Das Kontinuum erstreckt sich über solche Wissenschaften, deren Übergänge sich vor allem durch externe Faktoren vollziehen (wie z.B. Experimentalphysik) bis zu solchen (wie der reinen Mathematik), deren Übergänge fast ausschließlich durch interne Faktoren verursacht sind. Es gibt „differences of degree“ aber keine „differences of kind“ (Ibid., S.301).

Die Beispiele anhand derer Kitcher diese Reduktion begründet beziehen sich allerdings allesamt auf mathematische Axiome. Darüber hinaus gibt es aber, wie schon bei Quine angemerkt, signifikant unterschiedliche Methoden in der Mathematik (Beweis) und den Naturwissenschaften (Experiment). Kitcher thematisiert dies nicht, es spricht aber *gegen* eine solche Reduktion.

In Bezug auf Wahrheit und Unbezweifelbarkeit kommt der Mathematik ebenfalls keine Sonder- oder gar Königsrolle innerhalb der Wissenschaften zu. In Kitchers Naturalismus gilt für die Mathematik ebenso wie für die Naturwissenschaften: „Truth is what rational inquiry will produce in the long run.“ (Ibid., S.314) Wahrheit ist also keine Eigenschaft von Sätzen, sondern etwas, dem sich unser gesamter Korpus von (mathematischem und nicht-mathematischem) Wissen annähert.

Auch bei Kitcher steht hier, wie bei Quine, das behauptete Bestätigungsverfahren im Widerspruch zur tatsächlichen Praxis, der Kitcher ja eigentlich explizit Rechnung tragen will: Zum einen sprechen wir von „Wahrheit“ in der Mathematik nur in Bezug auf Sätze (und Axiome). Und zum anderen *begründen* wir die Wahrheit mathematischer Sätze im Rekurs auf *Beweise* und *nicht* damit, dass sie sich innerhalb unseres gesamten Korpus von wissenschaftlichem Wissen über lange Zeit bewährt haben.

In einem bisher nicht veröffentlichten Vortrag in Zürich 2009 hat Kitcher seine frühere Auffassung bezüglich der Wahrheit von Mathematik zumindest in einem dieser Teilaspekte revidiert. Nach seiner neuen Auffassung lässt sich die Mathematik in ihrer geschichtlichen Entwicklung zunächst einmal treffender als „a sequence of games played with language“ begreifen. Diese Idee ist natürlich von Wittgenstein inspiriert. Die Wahrheit ist nun eine Eigenschaft *von Sätzen*, die denjenigen Sätzen zukommt, die sich erreichen lassen „by acceptable transitions in language-games that are worth playing“. Die Wahrheit mathematischer Sätze bleibt aber weiterhin an die praktische Bewährung der mathematischen Sprachspiele geknüpft, in denen diese Sätze vorkommen („language-games that are *worth* playing“). Gegen *diesen* Aspekt von Kitchers Auffassung werde ich in Kapitel 7 aus Wittgenstein'scher Sicht im Detail argumentieren.

Lakatos

Lakatos entwickelt als Alternative eine Auffassung von Mathematik, die er „quasi-empirisch“ nennt. Dabei geht es ihm nicht darum, die Mathematik in einem ontologischen oder epistemischen Sinne als empirisch aufzufassen, sondern vielmehr darum *methodologische* Ähnlichkeiten zwischen dem mathematischen und dem empirischen Erkenntnisgewinn aufzuzeigen. Er unterscheidet dabei zwischen der „formalen“ Mathematik zum Zweck der Grundlegung der Mathematik und der „informalen“ Mathematik der tatsächlichen mathematischen Praxis.

Hinsichtlich der informalen Mathematik, so argumentiert Lakatos, vollzieht sich der Erkenntnisprozess nicht durch rein deduktives Ableiten aus den vorausgesetzten Axiomen, sondern Mathematikerinnen versuchen gerichteterweise bestimmte, für sie interessante Vermutungen zu beweisen.[20] Während dieses Prozesses tauchen oft Gegenbeispiele zur ursprünglichen Vermutung auf, worauf hin diese entsprechend modifiziert wird, z.B. über die Angabe zusätzlicher Bedingungen, und dann versucht wird, die modifiziert Vermutung zu beweisen (vgl. Lakatos 1976, S.127). Und damit vollzieht sich mathematischer Erkenntnisgewinn, so behauptet jedenfalls Lakatos, in etwa in analogen Schritten zum naturwissenschaftlichen Erkenntnisgewinn (Hypothese $\rightarrow$ Experiment $\rightarrow$ Falsifikation $\rightarrow$ neue, abgeänderte Hypothese wird aufgestellt).

Lakatos' erster Punkt ist nachvollziehbar. Es trifft sicherlich zu, dass Mathematikerinnen versuchen bestimmte Vermutungen beweisen,

[20] Dazu, wie sie dabei konkret vorgehen, hat Lakatos übrigens wesentlich Erhellenderes zu sagen, als Wittgenstein. Darauf kann ich allerdings an dieser Stelle nicht näher eingehen.

also auf ein Ziel hinarbeiten, anstatt einfach ungerichtet aus den Axiomen weitere Wahrheiten abzuleiten. Ob dies aber genügt, um die Bezeichnung „quasi-*empirisch*"zu rechtfertigen, ist jedoch sehr fraglich. Denn es bleiben selbst in *methodischer* Hinsicht immer noch zentrale Unterschiede zwischen Mathematik und Naturwissenschaften bestehen, die Lakatos nicht erwähnt:

- Die experimentell bestätigte Hypothese ist kontingent und kann empirisch falsifiziert werden. *Bewiesene* mathematische Sätze sind hingegen, so scheint es zumindest, *notwendig* wahr.

- Im Gegensatz zu einem naturwissenschaftlichen Experiment können wir einen mathematischen Beweis nicht vollständig beschreiben, ohne dabei zugleich schon zum Resultat gelangt zu sein. (Dieser Punkt stammt von Wittgenstein; ich werde ihn in Kapitel 8 weiter ausführen.)

Ferner lässt Lakatos auch die Anwendbarkeit von Mathematik in den Naturwissenschaften (2. Desideratum) unerklärt.

Hinsichtlich formaler (z.B. mengentheoretischer) Grundlegungen hält Lakatos fest, dass einer unserer unausgesprochenen Ansprüche an eine solche ist, dass sie die informalen Theorien einfängt. Dies illustriert er an folgendem Gedankenexperiment: Nehmen wir an eine Beweismaschine beweist in einer formaler Mengenlehre die Falschheit der Goldbachsche Vermutung. Gleichzeitig findet ein Zahlentheoretiker einen informalen (d.h. zahlentheoretisch inhaltlichen) Beweis, dass die Goldbachsche Vermutung stimmt. Nun gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder lässt sich der Beweis des Zahlentheoretikers ebenfalls in dieser Mengenlehre formalisieren, dann wäre sie damit als inkonsistent erwiesen und würde verworfen werden. Oder der Beweis lässt sich in dieser Mengenlehre nicht formalisieren, dann wäre diese mengentheoretische Darstellung eine falsche Darstellung der Arithmetik. Die bewiesene Goldbachsche Vermutung würde in diesem Fall, so Lakatos, die Axiome der zu Grunde gelegten Mengenlehre falsifizieren: „The formal theory is false in respect of the informal *explanandum* that it had set out to explain; we have to replace it by a better one." (Ibid., S. 37)

Die Güte einer Theorie und das Abwägen zwischen Alternativen wird nach der explanatorischen Kraft entschieden, d.h. danach, wie gut sie die informalen Teile der Theorie zu erklären vermag.

Dass wir in der Praxis die formalen Axiome so wählen, dass sie zuerst einmal die informalen Teile einfangen, ist sicherlich richtig. Es wirft jedoch die Frage auf, inwiefern die Formalisierung überhaupt irgendeine explanatorische Kraft haben soll. Dass wir wir die bevorzugte Axiomatisierung nach diesem Prinzip auswählen, heißt aber, kontra Lakatos, nicht, dass die anderen *falsch* wären. Anders als verschiedene naturwissenschaftliche Theorien können verschiedene mathematische Theorien widerspruchsfrei nebeneinander stehen. Sie bilden verschiedene Begriffsschemata, sie beschreiben nicht verschiedene Realitäten. Dieser Punkt lässt sich ebenso gegenüber Quine und Kitcher anmerken.

Auch wenn Kitcher und Lakatos berechtigte Kritik an grundlegungsorientierten Philosophie der Mathematik äussern, sind die von ihnen vorgeschlagenen Alternativen also aus den dargestellten Gründen problematisch.

Wie wir gesehen haben, hat Wittgenstein ebenfalls überzeugende und sogar interne Argumente gegen grundlegungsorientierte Philosophie der Mathematik. Anders als Kitcher und Lakatos (und auch Quine) hält er in seiner Alternative an einer kategoriale Unterscheidungen zwischen mathematischen und empirischen Sätzen und mathematischen und empirischen Verifikationsmethoden fest. Seine Unterscheidung ist kompatibel kompatibel mit der Eingebundenheit in eine Praxis in Kitchers Sinne und sie schließt in keiner Weise aus, dass die Frage, warum sich die Mathematik so entwickelt hat, wie sie sich entwickelt hat, eine empirische Fragestellung ist und von der Geschichte der Mathematik informiert werden sollte. Auf Grund seiner kategorialen Unterscheidung ist seine Alternative jedoch nicht den Einwänden ausgesetzt, die sich gegen Kitcher und Lakatos geltend machen lassen. Sie ist deshalb die Überzeugendere.

2.4.3 Aktuelle Entwicklungen

Während die Arbeiten von Lakatos und Kitcher noch Außenseiterpositionen darstellten, finden solche Ansätze, die einer grundlegungsorientierten Philosophie der Mathematik aus ähnlichen Gründen skeptisch gegenüber stehen und ihr Interesse auf die tatsächliche mathematische Praxis richten, zunehmend auch in der Mainstream-Philosophie der Mathematik Gehör. In den letzten Jahren ist auf dem Gebiet der mittlerweile sogenannten *Philosophie der mathematischen Praxis* extensiv publiziert worden (Mancosu 2008, Buldt et al. 2008, Hersh 2006, van Kerkhove & van Bendegem 2002, van Kerkhove 2009). Horsten 2012 prognostiziert in seinem Eintrag zur Philosophie der Mathematik in der *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, dass sich dieser Trend in den kommenden Jahren „zweifellos fortsetzen“ wird.

Obwohl diese Trendwende durchaus als eine „im Geiste Wittgensteins“ betrachtet werden kann, wie wir gerade gesehen haben, wird dieser dort weiterhin nicht angemessen berücksichtigt. So heißt es z.B. in der Einleitung zu Buldt et al. 2008, in der die Autoren für eine „revision of the foundationalist epistemology of mathematics“ plädieren:

> Indeed, philosophers like Wittgenstein, Lakatos, and Ernest have been advocating the view that mathematics should not be considered special; instead, they argue that its methodology is far more similar to that of the empirical sciences than what the usual image of a "proving discipline" with its emphasis on a specific formal methodology suggests. (Buldt et al. 2008, S.312)

Die Autoren nehmen also zumindest Notiz davon, dass Wittgenstein sich mit der Philosophie der mathematischen Praxis beschäftigt. Sie bemängeln dann aber an den Auffassungen aller drei von ihnen genannten Autoren, inklusive Wittgenstein, dass diese den Umstand nicht erklären können, dass „the epistemic status of a mathematical theorem is decidedly different from research results in, e.g., paleoanthropology.“ In Bezug auf Wittgensteins Position ist diese Kritik definitiv unhaltbar.

Ferner sehen sie es als ein „Desideratum“ für die Philosophie der

Mathematik an, „that philosophers of mathematics develop a mediating position that strikes a balance between the special epistemic character of mathematics and the social embedding of mathematical practice." (Ibid.) Ein entscheidender Vorzug von Wittgensteins normativer Auffassung der Notwendigkeit mathematischer Sätze ist es, dass diese beiden Aspekte (die Desiderata 1 und 2 aus 1.2.1) danach gerade *nicht gegeneinander abgewogen* werden müssen, sondern *völlig kompatibel* sind. Insofern *sollte* Wittgensteins Position in der aktuellen Diskussion der Philosophie der mathematischen Praxis *angemessen* berücksichtigt werden.

Auch wenn die im Rahmen dieses Überblicks dargestellten möglichen Beiträge einer Wittgenstein'schen Philosophie der Mathematik für die aktuelle Debatten natürlich im einzelnen weiter ausgearbeitet werden müssten, hat sich gezeigt, dass in einer solchen Position großes Potential steckt.

Damit sich dieses Potential entfalten lässt, muss zuvor allerdings überhaupt erst noch gezeigt werden, dass sich Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik gegen bestehende Einwände verteidigen lässt, bzw. dass zutreffende Einwände ausgebügelt werden können.

Kapitel 3

Wittgenstein als Alternative

Wittgenstein ist zweifelsohne einer der bedeutendsten Philosophen des 20. Jahrhunderts. In seinen Nachlassschriften nimmt die Beschäftigung mit Philosophie der Mathematik den größten Raum ein und er selbst hat 1944 angegeben, seinen wichtigsten philosophischen Beitrag in eben diesem Bereich geleistet zu haben (Monk 1990, S.467).

Nichtsdestotrotz sind seine Bemerkungen zur Mathematik wohl die am wenigsten verstandenen. Ihre Exegese und Bewertung sind noch immer sehr lückenhaft und die Diskussion ihrer Relevanz für aktuelle Debatten in der Philosophie der Mathematik fehlt fast gänzlich. In den einschlägigen Überblickstexten und Anthologien zur Philosophie der Mathematik wird Wittgenstein entweder gar nicht aufgeführt – so z.B. im Eintrag der Stanford Encyclopedia of Philosophy (Horsten 2012) – oder allenfalls aus historischer Sicht diskutiert, wie z.B. im Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic (Shapiro 2005).

Dabei ist Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik weder *überholt* noch *widerlegt*. Wie in den letzten beiden Kapiteln dargestellt, gibt es sogar gute Gründe anzunehmen, dass sich im Ausgang von Wittgensteins These, dass mathematische Sätze Regeln der Sprache ausdrücken, eine Position gewinnen lässt, die für die aktuelle Philosophie der Mathematik eine wichtige Alternativen jenseits der festgefahrenen Debatten böte. Es fehlt dort an einer Position, die zugleich die historische und soziokulturelle Dimension der mathematischen Praxis erfassen kann *und* den besonderen epistemischen Status mathematischer Sätze erklärt. *Warum* Wittgensteins späte Philosophie in aktuellen systematischen Debatten nahezu keine Beachtung findet, ist vor diesem Hintergrund *erklärungsbedürftig*.

3.1 Warum wird Wittgenstein in der Philosophie der Mathematik so wenig diskutiert?

Die Gründe dafür sind vielschichtig:

- Zum einen liegen die Schwierigkeiten in der Textgrundlage. Wittgensteins „Position“ liegt in Form von einzelnen, mehr oder weniger ausgearbeiteten Bemerkungen aus seinen Nachlassnotizen vor. Einerseits macht sie dies schwer zugänglich, insbesondere für Nichtspezialisten. Andererseits handelt es sich um „Work in Progress“, in dem der Autor selbst mit seinen Positionen ringt, das Inkonsistenzen aufweist und Fragen offen lässt. Das gilt insbesondere für seine Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Sinn mathematischer Sätze und ihren Beweisen.

- Zum anderen liegen sie in der Auswahl der betrachteten Beispiele. Wittgenstein legt seine Überlegungen vor allem an elementaren arithmetischen Rechnungen dar und bezieht sich außerdem gelegentlich auf „Revolutionen“ mathematischen Denkens, die mit der Erfindung völlig neuer Techniken und Kalküle einhergehen, wie z.B. das Cantorsche Diagonalverfahren, Gödels Unvollständigkeitssätze oder Beweise von geometrischer (Nicht-) Konstruierbarkeit mittels Zahlentheorie. Beides spielt im Forschungsalltag eines Mathematikers eher eine untergeordnete Rolle und es ist prima facie nicht klar, ob und wie sich Wittgensteins Thesen auch mit Blick auf die Mathematik rechtfertigen lassen, mit der dieser sich üblicherweise beschäftigt. Das gilt insbesondere für die typischen Beweise der mathematischen Forschung.[1]

[1] Darauf weist auch Glock (1996, Artikel „mathematical proof“) hin.

- Und schließlich haben frühe Fehlinterpretation der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* eine angemessene systematische Beurteilung von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik nachhaltig behindert. Dies gilt insbesondere für einen einflussreichen Kommentar der *BGM* von Dummett (1959), der die Debatte um diese, vor allem im englischsprachigen Raum, für lange Zeit geprägt hat und noch immer beeinflusst. Nach dieser Interpretation, der gemäß Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen zu einem „vollblütigen Konventionalismus" bezüglich mathematischer Sätze führen, erscheint Wittgensteins Auffassung vom Wesen der Mathematik hochgradig unplausibel und daher wenig attraktiv für die Philosophie der Mathematik.

Frühe Kommentatoren wussten die Radikalität von Wittgensteins Bemerkungen, die an grundlegenden Annahmen über das Wesen der Mathematik rütteln, oft nicht recht zu würdigen und werteten sie stattdessen als Beleg seiner mangelnden mathematischen Sachkenntnis. Der Mathematiker und Wittgenstein-Schüler Georg Kreisel schließt beispielsweise seine 1958 veröffentlichte Besprechung der 1956 erstveröffentlichten *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* mit der Bemerkung: „it seems to me a surprisingly insignificant product of a sparkling mind" (Kreisel 1958). Die oben angesprochene Auswahl der Beispiele schien diesen Vorwurf nur noch zu bestätigen. In Folge dessen wurde den *BGM* lange Zeit kaum Aufmerksamkeit geschenkt.

Bis heute findet die Auseinandersetzung mit Wittgensteins Philosophie der Mathematik vor allem im Kreise der Wittgenstein-Spezialisten statt. Diese Beiträge sind wichtig für die Wittgenstein-Forschung, aber für Interessenten von Außen, aus der Philosophie der Mathematik, nur schwer zugänglich. Dadurch mangelt es Kritikern Wittgensteins aus der Philosophie der Mathematik oft an genauen Kenntnissen seiner Texte und deren philosophischem Hintergrund, weshalb sie seine Position oft vorschnell ablehnen (wie im Beispiel aus 2.4.3). Derweil besitzen die Wittgenstein eher positiv gegenüberstehenden Exegeten nicht immer fortgeschrittene Mathematikkenntnisse, was die Beurteilung der Stimmigkeit der Bemerkungen erschwert. Symptomatisch hierfür ist der Kommentar von Baker & Hacker (2009, insbes. Kapitel VII.13), der Wittgensteins Philosophie der Mathematik zwar treffend darstellt, in dem eine Problematisierung seiner Thesen aber nahezu völlig ausbleibt. Beides ist für die Evaluation von Wittgensteins Bemerkungen aus systematischer Perspektive hinderlich.

Des Weiteren haben Experten wiederholt kritisiert, zuletzt Mühlhölzer, dass die in den *BGM* herausgegebenen Nachlassnotizen „auf teilweise höchst eigenwillige und selektive Weise"(Mühlhölzer 2010, S.ix) ausgewählt worden sind, was das Verständnis dieser Bemerkungen noch unnötig erschwert.

Da erst seit 2000 der gesamte *Nachlass* in elektronischer Form in der *Bergen Electronic Edition* zur Verfügung steht, bezieht sich trotz der Mängel der *BGM* bis heute die meiste Sekundärliteratur zur Philosophie der Mathematik des späten Wittgenstein auf diese Quelle.

Derzeit arbeitet Mühlhölzer an einem umfassenden Kommentar der *BGM* in mehreren Bänden, der verspricht die Exegese auf ein neues Niveau zu heben.[2] Er bezieht die umgebenden *Nachlass*stellen in die Interpretation der einzelnen Bemerkungen mit ein, illustriert Wittgensteins Gedanken an neuen Beispielen und benennt Lücken und Inkonsistenzen in Wittgensteins Darstellung. Mühlhölzer betont, dass es lohnend erscheint, Wittgensteins zentrale Überlegungen in der Philosophie der Mathematik weiterzudenken und daraus eine Position für aktuelle Debatten zu gewinnen (Mühlhölzer 2010, S.xi). Er selbst verfolgt in seinem Kommentar allerdings rein exegetische Ziele.

3.2 Ziele der Arbeit

Diese Arbeit soll in erster Linie einen Beitrag dazu leisten, Wittgensteins Position *anschlussfähig* an die aktuellen Debatten in der Philosophie der Mathematik zu machen. Im Folgenden werde ich drei aus meiner Sicht wesentliche Hindernisse darstellen, die ich zu diesem Zweck im Hauptteil der Arbeit ausräumen möchte.

[2] Bisher ist ein erster Band zum Teil III der *BGM* erschienen (2010), weitere sollen folgen.

3.2.1 Fehlinterpretationen

Insbesondere Wittgensteins zentrale These, nach der mathematische Sätze grammatische Sätze sind, stieß von Anfang an auf Unverständnis. So fragt Kreisel, warum in diesem Fall Beweise benötigt werden, „since a rule of language, as ordinarily understood, is a matter of simple decision“ (Kreisel 1958, S.140). Zumindest in dieser Formulierung lässt sich die Frage noch leicht kontern: „Well, this is a bit like asking: ‘If tennis is a ball game, then why can’t one score any goals?’“ (Schroeder 2012, S.461) Es ist gehört natürlich nicht zum *Begriff* der grammatischen Regel, dass sie willkürlich gewählt werden muss. Das mag für viele grammatische Regeln der Fall sein, aber z.B. für alle diejenigen, die wir als mathematische Sätze bezeichnen und über Beweise einführen, gilt dies eben nicht. Wenn man allerdings Dummetts Interpretation der Regelfolge-Überlegungen folgt, stellt sich Kreisels Frage umso dringlicher, wie ich in einem späteren Kapitel (6.1.2) noch ausführen werde.

Konsequenzen der Regelfolgen-Überlegungen

Dummetts Kommentar ist nicht nur eine der frühsten, sondern auch die einflussreichste Interpretation der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*; allerdings ist sie keinesfalls die treffendste. Notorisch ist seine darin vertretene These, Wittgensteins normative Auffassung von Notwendigkeit führe zu einem „vollblütigen Konventionalismus“ bezüglich mathematischer Sätze. Danach würde jeder noch unentschiedene mathematische Satz eine neue potentielle linguistische Konvention ausdrücken, die unabhängig von bereits getroffenen Entscheidungen bezüglich anderer linguistischer Konventionen angenommen oder verworfen werden kann, d.h. insbesondere unabhängig von Definitionen, Axiomen oder anderen mathematischen Sätzen. Dies läuft unseren Vorstellung von und Erfahrungen mit Mathematik und insbesondere mathematischen Beweisen sicherlich zuwider. Falls Dummetts Interpretation zuträfe, oder, schlimmer noch, falls Wittgenstein durch seine normative Auffassung von Notwendigkeit auf einen vollblütigen Konventionalismus verpflichtet wäre, so würde das seine Philosophie der Mathematik zumindest vor gravierende Probleme stellen.

Dummetts Interpretation folgt aus seiner ‚skeptischen' Lesart der sogenannten *Regelfolge-Überlegungen* aus den *Philosophischen Untersuchungen*. Aus Dummetts Sicht schließen die Regelfolge-Überlegungen nämlich aus, dass objektiv beurteilt werden kann, was an einer konkreten Stelle die einer bestimmten Regel gemäße Handlung ist. Und die dadurch entstehende Kluft zwischen Regel(-ausdruck) und Anwendung muss daher durch eine (willkürliche) Entscheidung überbrückt werden.

Die skeptische Lesart der Regelfolge-Überlegungen selbst ist im Anschluss an ein einflussreiches Buch von Kripke (1982), dem sie auch ihre Bezeichnung „verdankt", kontrovers diskutiert und auch kritisiert worden, ohne dass allerdings bisher ein weitgehender Konsens erreicht wurde.

Dummetts Befund wird längst nicht von allen Interpreten geteilt, insbesondere von denjenigen nicht, die Wittgensteins später Philosophie der Mathematik grundsätzlich positiv gegenüberstehen. Dort trifft Dummett zwar teilweise auf harsche Ablehnung (wie z.B. bei Baker & Hacker 2009), aber eine detaillierte Auseinandersetzung mit Dummetts Interpretation bleibt oft aus. Dies ist bedauerlich, da Dummetts Interpretation auf der anderen Seite keinesfalls gemeinhin als widerlegt gilt. Im Gegenteil: Sie hat nicht nur die Debatte um Wittgensteins später Philosophie der Mathematik nachhaltig geprägt, sondern stellt nach wie vor einen wesentlichen Bezugspunkt (Frascolla 1994) in deren Interpretation dar. Erst kürzlich hat Potter (2011) im Zusammenhang mit Wittgensteins später Philosophie der Mathematik erneut behauptet, die Essenz der Regelfolge-Überlegungen sei, dass es eine unüberbrückbare Kluft zwischen der Regel und ihrer Anwendung gäbe.

Obwohl über die Interpretation von Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen nach wie vor kein Konsens besteht, gibt es meiner Ansicht nach Interpretationen, die sowohl der skeptischen Interpretation klar widersprechen, als auch exegetisch überzeugen, wie Baker & Hacker (2009), Schroeder (2006), Glock (1996) oder auch Goldfarb (2012).

Diese Autoren werten ihre Interpretationen allerdings nicht in Bezug auf deren Konsequenzen für Wittgensteins Philosophie der Mathematik aus.

Bedeutung der empirischen Gegebenheiten

In den letzten Jahren zeigt sich eine neuer Trend in der Interpretation von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik, der dessen Position in die Nähe einer empiristischen Mathematikauffassung rückt (Ramharter & Weiberg 2007, Schroeder 2015, Steiner 2009, Weiberg 2008).

Wittgensteins späte Nachlassbemerkungen, in denen er immer wieder die Relevanz der Gegebenheiten der Welt, der Erfahrung und der Bewährung für die Mathematik betont, werden dabei auf verschiedene Weise als spätere Abkehr oder zumindest Relativierung seiner These, mathematische Sätze seien grammatische Sätze und damit der Empirie gegenüber autonom, gelesen.

Die so interpretierte Position Wittgensteins steht aus systematischer Sicht vor Problemen: Die These, dass mathematische Sätze nicht grundsätzlich von empirischer Falsifikation ausgeschlossen sind, ist schwer mit der tatsächlichen mathematischen Praxis zusammenzubringen. Ferner kann die Rolle von Beweisen so oft nicht mehr angemessen erfasst werden.

3.2.2 Baustellen im *Nachlass*

Die größte offene Baustelle in Wittgensteins *Nachlass*, zumindest was die Philosophie der Mathematik anbelangt, betrifft meiner Ansicht nach einen wesentlichen Aspekt seiner Darstellung mathematischer Beweise, nämlich seine These, der Sinn eines mathematischen Satzes sei durch seinen Beweis bestimmt und die mit dieser These verbunden Probleme. Diese These zieht sich in verschiedenen Varianten und unter verschiedenen Qualifikationen durch den gesamten Nachlass.

Prima facie wirft sie eine Reihe von Problemen auf: Wenn dem so ist, können wir, so scheint es, weder mathematische Vermutungen verstehen, noch denselben Satz auf verschiedene Weise beweisen. Beziehungsweise eine „Wort-Symbol-Kette“, z.B. diejenige, die wir als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnen, hätte verschiedene Bedeutungen, je nach dem welchen Beweis wir für sie angeben. Ferner ist fraglich, ob und wie sich die These mit der *Gebrauchsauffassung der*

Bedeutung aus den *Philosophischen Untersuchungen* vereinbaren lässt.

In den späten Teilen des *Nachlass* wurde Wittgenstein zunehmend bewusst, dass diese Konsequenzen in einem gewissen Widerspruch zum tatsächlichen Umgang mit Vermutungen und Sätzen in der mathematischen Praxis stehen. Er kehrt jedoch immer wieder zu dieser These zurück. Einschlägige Textpassagen aus den *BGM* und umgebenden Stellen aus dem unveröffentlichten Nachlass zeugen davon, wie Wittgenstein darum ringt, seine Überzeugungen hinsichtlich mathematischer Beweise mit diesen Aspekten der Praxis zu vereinbaren. Dabei gelingt es ihm aber auch nach eigener Überzeugung nicht, zu einer zufriedenstellenden Lösung zu gelangen. Mühlhölzer (2010) und Potter (2011) vermuten sogar, dass dies ein Grund gewesen sein könnte, weshalb Wittgenstein nach 1944 seine Arbeiten zur Mathematik nicht wieder aufgenommen hat.

Die *strategischen Ziele* der Arbeit sind es zu zeigen dass Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik weder (i) mit einem „vollblütigen Konventionalismus" bezüglich mathematischer Sätze zu vereinbaren ist, noch (ii) mit jeglichen Formen des Naturalismus. Ferner werde ich (iii) eine eigene Auffassung mathematischer Beweise entwickeln, die die Spannungen und Inkonsistenzen in Wittgensteins Darstellung vermeidet und gleichzeitig im Einklang mit den wesentlichen Grundideen aus Wittgenstein Spätphilosophie steht. Damit stünde der Weg frei für eine angemessene Auseinandersetzung Auseinandersetzung mit Wittgensteins Position in aktuellen Debatten der Philosophie der Mathematik.

3.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Teil II besteht aus zwei kurzen Kapiteln zur in dieser Arbeit verwendeten Textgrundlage und Terminologie. Er dient als Vorbereitung zum Hauptteil III.

In **Kapitel 4**, *Die Quelle zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik*, werde ich genauer darstellen, in welcher Form Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik vorliegt und welche Probleme sich daraus ergeben. Ferner werde ich erläutern, wie ich in dieser Arbeit mit diesen Quellen und den mit ihnen verbundenen Problemen umgehen werde.

In **Kapitel 5**, *Begriffserläuterungen und Terminologie*, werde ich eigene Terminologie zur Unterscheidung verschiedener Typen mathematischer Sätze und mathematischer Beweise einführen und erläutern, die ich in dieser Arbeit zum Einsatz bringe.

Die drei langen Kapitel aus **Teil III** stellen den *eigentlichen Kern der Arbeit* dar.

In **Kapitel 6**, *Mathematik und Regelfolgen*, werde ich aus dem Blickwinkel der oben genannten (3.2.1) anti-skeptischen Interpretationen im Detail zeigen, an welchen Stellen Dummetts und die von ihm inspirierten Interpretation fehlgehen. Darüber hinaus werde ich weitere in der Debatte verbreitete Missverständnisse bezüglich der Rolle von Regelausdrücken und der Rolle lebensweltlicher Praktiken aufklären, die ebenfalls aus den Regelfolge-Überlegungen abgeleitet werden.

Ferner werde ich die Regelfolge-Überlegungen bezüglich ihrer Konsequenzen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik neu evaluieren. Dabei werde ich einerseits dafür argumentieren, dass diese die Regeln der höheren Mathematik *nicht in gleicher Weise* betreffen, wie Regeln zur Bildung einfacher Zahlenreihen oder einfache logische Schlussregeln. Andererseits werde ich zeigen, dass die Regelfolge-Überlegungen für die Frage relevant sind, ob und inwiefern sich sinnvollerweise von den *„Grundlagen“ der Mathematik* sprechen lässt. Diese Grundlagen verortet Wittgenstein danach in unseren menschlichen Praktiken und stellt zugleich klar, dass und warum es in einem konstitutiven Sinne keine Grundlagen für die Mathematik geben kann.

In **Kapitel 7**, *Mathematik und Empirie*, werde ich zeigen, dass diejenigen oben genannten (3.2.1) Interpretationen, die Wittgensteins Position in die Nähe einer empiristischen Mathematikauffassung rücken, nicht nur aus *systematischer Sicht* problematisch sind, sondern auch aus *exegetischer Sicht* nicht überzeugen.

Dabei werde ich zunächst argumentieren, dass Wittgenstein der Empirie zwar eine pragmatische Relevanz für die Entwicklung von Mathematik zugesteht, er aber darauf beharrt, dass die Gültigkeit mathematischer Regeln und mithin ihre Unumstößlichkeit davon völlig unabhängig bleibt. Für diese Sicht werde ich ferner eine *Wittgensteinianische Begründung* vorschlagen.

Anschließend werde ich dann die Frage diskutieren, wie weit der Inhalt der Mathematik durch die empirischen Gegebenheiten geformt wird. Dabei werde ich sowohl zeigen, dass es gemäß Wittgenstein nicht nur einen Einfluss der Empirie auf die Entwicklung der Mathematik gibt, sondern die Mathematik auch *ihrerseits* unsere (wissenschaftlichen) Beschreibungen der empirischen Daten beeinflusst, als auch, dass Wittgenstein die Tätigkeit des Mathematikers als eine echt kreative Tätigkeit begreift, die folglich durch empirische Gegebenheiten zwar motiviert und begrenzt, aber nicht vorherbestimmt wird.

Darüber hinaus werde ich für die systematische These argumentieren, dass die von mir entwickelte Interpretation, im Gegensatz zu den diskutierten Alternativen, die tatsächliche mathematische Praxis adäquat beschreibt.

In **Kapitel 8**, *Sinn und Beweis mathematischer Sätze*, werden die mit Wittgensteins These, dass der Sinn eines mathematischen Satzes durch dessen Beweis bestimmt sei, verbundenen Probleme systematisch dargestellt und Wittgensteins eigene Lösungsversuche für diese Probleme exegetisch erschlossen. Dabei wird sich zeigen, dass sich im *Nachlass* keine vollständig zufriedenstellende Lösung dieser Probleme findet.

Ferner werde ich anhand von Beispielen aus der *mathematischen Praxis* dafür argumentieren, dass die Verwendung mathematischer Sätze in nicht-mathematischen, aber auch in *mathematischen* Sprachspielen nahelegt, die These aufzugeben.

Obwohl Wittgenstein selbst im Laufe der Zeit der These gegenüber immer skeptischer wurde und ihr an manchen Stellen sogar zu widersprechen scheint, verabschiedet er sich doch nie gänzlich von ihr und arbeitet erst recht keine Alternative aus.

Daraufhin entwickele ich einen *eigenen*, von *Wittgenstein inspirier-*

ten Vorschlag zur Lösung. Dieser Vorschlag basiert auf einer geeigneten Unterscheidung zwischen den *Fähigkeiten* zur *Rechtfertigung* und zur *Anwendung* mathematischer Sätze – insbesondere hinsichtlich des von Wittgenstein und seinen Interpreten bisher vernachlässigten Aspekts der *innermathematischen* Anwendung – und stützt sich wesentlich auf Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung aus den *Philosophischen Untersuchungen*. Er ist kompatibel mit den relevanten Aspekten der mathematischen Praxis und passt ferner in das allgemeine Rahmenwerk von Wittgensteins Spätphilosophie. Insbesondere wären danach, entgegen der Behauptung von Potter (2011), die Konsequenzen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik, die sich aus einer Aufgabe des notwendigen Zusammenhangs zwischen Sinn und Beweis mathematischer Sätze ergeben hätte, aus systematischer Sicht keineswegs fatal.

In **Kapitel 9**, dem Schlusswort der Arbeit, werden die Ergebnisse der Arbeit nochmals zusammengefasst.

Teil II

Kapitel 4

Die Quelle zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik

Wie bereits in 3.1 bemerkt, ergeben sich aus der Form, in der uns Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik vorliegt, diverse Probleme mit der Interpretation dieser Position, die sich entsprechend leider auch in deren Rezeption niederschlagen.

Im Folgenden werde ich die Quellen zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik und die mit ihnen verbundenen Probleme darstellen und erläutern, wie ich in dieser Arbeit damit umgehen werde.

4.1 Die Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik

Die *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* sind die in der Forschungsliteratur wohl einflussreichste Quelle, was Wittgensteins *späte* Philosophie der Mathematik angeht. Mit Ausnahme von Anhang I zu Teil I, der aus der Zeit 1933-34 stammt, stammt das in den *BGM* veröffentlichte Material aus Notizen aus der Zeit von September 1937 - April 1944.

Die *BGM* wurden erstmals 1956 veröffentlicht. Sie waren damit nach der Veröffentlichung der *PU* 1953 die zweite Veröffentlichung aus Wittgensteins *Nachlass*. Anders als die *PU* waren sie weder jemals von Wittgenstein zur Veröffentlichung vorgesehen, noch stammt die Zusammenstellung der Bemerkungen von Wittgenstein selbst. Insbesondere in der ersten Auflage war der Text im Vergleich zu Wittgensteins Originalnotizen zum Teil erheblich gekürzt und Bemerkungen in ihrer Reihenfolge vertauscht, was von Experten, wie bereits bemerkt, wiederholt kritisiert worden ist. 1974 (englische Übersetzung 1978) erschien eine überarbeitete 2. Auflage der *BGM*, die sich, im Gegensatz zur ersten Auflage, zumindest durchgängig an Wittgensteins Einteilung in Bemerkungen hält und in weiten Teilen Wittgensteins Ordnung beibehält. Allerdings handelt es sich nur bei Teil I und Teil VI um *vollständige* Wiedergaben eines Textes von Wittgenstein. Obwohl in der 2. Auflage immerhin einige Lücken der ersten Auflage geschlossen wurden, bleiben andere, teilweise gravierende Lücken weiterhin bestehen. Einer der Herausgeber selbst ist mit der Auswahl der Bemerkungen wenig zufrieden. Laut H. von Wright nehmen die *BGM* eine „not altogether happy position among the posthumous publications“ ein (von Wright 1982, S. 58).

Auf Grund dieser Entstehungsgeschichte verbietet es sich streng genommen, davon zu sprechen, dass Wittgenstein „in den *BGM* XY sagt / behauptet / vertritt“. Ich werde solche Formulierungen trotzdem gelegentlich verwenden, da eine korrekte Alternative „Wittgenstein sagt / behauptet / vertritt in einer der in den *BGM* veröffentlichten Bemerkungen aus seinem *Nachlass* “ zu sperrig ist.

4.2 Der „unveröffentlichte“ *Nachlass*

Einen gewissen Einschnitt in der Exegese von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik bedeutete die Veröffentlichung des gesamten *Nachlasses* in elektronischer Form als *Bergen Electronic Edition (BEE)* im Jahr 2000.[1] Wenn ich in dieser Arbeit von Wittgensteins *Nachlass* spreche, meine ich damit sämtliches Material, das in der *BEE* veröffentlicht worden ist, mit Ausnahme des *Tractatus*, der ja schon zu

[1]Die normalisierte Form ist ferner seit 2003 online bei *InteLex Past Masters* verfügbar.

Wittgensteins Lebzeiten veröffentlicht worden ist. Zum *Nachlass* zähle ich hingegen auch die *PU* und jene Bemerkungen aus dem *Nachlass*, die in Buchform, beispielsweise in den *BGM* veröffentlicht worden sind.

Wenn ich mich auf das Material beziehe, das *nur* in der *BEE* und *nicht* in Buchform veröffentlicht worden ist, spreche ich von dem *unveröffentlichten Nachlass*.[2] Dazu ist zu bemerken, dass zum *unveröffentlichten Nachlass* keine englische Übersetzung existiert, was für die Wittgenstein-Exegese im englischsprachigen Raum ein gewisses Hindernis darstellt.

Seit der Veröffentlichung der *BEE* sind Wittgensteins Manuskripte aus denen das in *BGM* veröffentlichte Material entnommen ist also zumindest allen denjenigen zugänglich, die über ausreichende Deutschkenntnisse verfügen. Das entsprechende Material zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik findet sich im *Nachlass*, den Teilen MS 117-127 sowie den aus der gleichen Zeit stammenden Manuskripten MS 158-164. Insbesondere sind darin alle in den *BGM* veröffentlichen Bemerkungen enthalten. In dieser Arbeit werde ich die Abkürzung *BGM + Nachlass* verwenden, um mich damit auf die *BGM* sowie auf die entsprechenden Texte aus dem *Nachlass* zu beziehen, aus denen die *BGM* entstanden sind. Mit dem Ausdruck „Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik“ beziehe ich mich auf *BGM + Nachlass* sowie die *LFM* (s. unten, 4.3).

Der nun mögliche Abgleich mit den Originalmanuskripten kann einen großen Beitrag zu einem besseren Verständnis von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik leisten. Mühlhölzer bemerkt dazu in der Einleitung zu seinem akribischen Kommentar zum Teil III der *BGM*, dass sich mit dem Einbeziehen des *Nachlasses* seiner Erfahrung nach viele Interpretationsprobleme lösen, die sich in den *BGM* ergeben (vgl. Mühlhölzer 2010, S.ix). Die exegetische Erschließung der entsprechenden Nachlassmanuskripte befindet sich aber nach wie vor in ihren Anfängen.

Trotz der mit Textauswahl der Herausgeber verbundenen Probleme ist zu beachten, dass sich ein großer Teil der Forschungsliteratur auf

[2] Genau genommen ist dieses Material natürlich mittlerweile veröffentlicht, nämlich in der *BEE*.

die *BGM* bezieht. Der einflussreiche Kommentar von Crispin Wright (Wright 1980) verwendet sogar die erste Auflage. Diesem Umstand ist einerseits bei der Begutachtung der Sekundärliteratur Rechnung zu tragen: Ist jede Kritik berechtigt? Oder gewinnen Wittgensteins Gedanken im Nachlasskontext an mehr Plausibilität? Andererseits spricht er aber auch dafür, die *BGM* trotz aller Mängel als Textgrundlage ernst zu nehmen. Dies ist auch ein Grund aus dem Mühlhölzer sich für einen Kommentar der *BGM* unter Einbeziehung des unveröffentlichten *Nachlasses* entscheidet, obwohl er die *BEE inhaltlich* für die geeignetere Grundlage hält.[3] Die *BGM* waren und sind die Grundlage der Forschungsliteratur zur Philosophie der Mathematik des späten Wittgenstein. Und da eine neue und vollständigere Publikation aus seinem *Nachlass* derzeit nicht in Sicht ist, werden sie das wohl auch noch eine Weile bleiben.

Im Umgang mit Wittgensteins *Nachlass* ist generell zu berücksichtigen, dass es sich bei allen Texten um unfertige, mehr oder weniger und zu großen Teilen auch gar nicht überarbeitete Rohfassungen handelt. Das gilt insbesondere für die *BGM + Nachlass*, in denen einzig der erste Teil aus einem Typoskript stammt. Alle anderen Teile sind jedoch handschriftlichen Notizen von Wittgenstein entnommen und daher besonders wenig überarbeitet[4] Auf Grund des Rohbaucharakters muss man mit Fehlern, Inkonsistenzen und Widersprüchen im Material rechnen. Die Texte können keinesfalls als Wittgensteins abschließende Meinung betrachtet werden. Erst wenn Gedanken häufiger auftauchen, kann man davon ausgehen, dass sie sich für Wittgenstein bewährt haben und ihnen einen gewissen Thesen-Charakter zuschreiben.

Ein weiteres Problem, dass auch unter Einbeziehung des unveröffentlichten *Nachlasses* bestehen bleibt, ist die fehlende thematische Ordnung in Wittgensteins Texten. Es gibt zwar Gründe für die Reihenfolge seiner Bemerkung, aber es handelt sich in der Regel einfach um Assoziationsketten, um Notizen von laufenden Gedankengängen,

[3] Ramharter und Weiberg argumentieren ähnlich für die Nützlichkeit ihres Kommentars der *BGM* (Ramharter & Weiberg 2007).

[4] Siehe Schulte (2002, S.238) für eine nützliche Unterteilung in verschiedene Bearbeitungsstufen.

die anschließend nicht noch einmal überarbeitet wurden. Es finden sich insbesondere selten *Argumentationketten*. Diese müssen folglich erst *herausgearbeitet* werden. Für eine *systematische* Aufbereitung von Wittgensteins Bemerkungen ist es daher unerlässlich, Textstellen zu selektieren und in eine eigene Ordnung zu bringen.

Dies birgt allerdings wiederum die Gefahr von Fehlinterpretationen.

Diese Gefahr ist ernst zunehmen und ihr kann nicht einfach mit dem Verweis darauf begegnet werden, dass es für den systematischen Gehalt einer Arbeit egal sei, „was Wittgenstein sich nun genau gedacht“ habe. Denn Fehlinterpretationen, wie zum Beispiel diejenige von Dummett, sind ohne Zweifel mit dafür verantwortlich, dass wertvolle Einsichten aus Wittgensteins später Philosophie der Mathematik bisher keine Beachtung in den systematischen Debatten finden.

Auf Grund der Textlage ist es allerdings, zumindest in einer systematisch orientierten Darstellung, äußerst schwierig, wenn nicht gar unmöglich, Wittgenstein völlig gerecht zu werden. Ich habe mich bemüht, in diesem Spannungsfeld einen geeigneten Kompromiss zu finden. Dabei wird meine Arbeit nicht allen Ansprüchen gerecht, die man an einen rein exegetischen Kommentar haben kann, z.B. hinsichtlich Philologie und Entwicklungsgeschichte. Dort, wo ich exegetische Thesen aufstelle, habe ich aber stets versucht entsprechend anzugeben, wie gut sie durch den Text abgesichert sind.

4.3 Weitere Quellen

Zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik steht mit den verschiedenen erhaltenen Vorlesungsmitschriften zu Wittgensteins 1939 in Cambridge gehaltenen *Lectures on the Foundations of Mathematics* ferner eine weitere Quelle zur Verfügung. Cora Diamond hat 1976 unter demselben Titel eine, laut Joachim Schulte, durchaus zuverlässige, sorgfältig editierte Version der Vorlesungen anhand eines Vergleichs der vier verfügbaren Mitschriften von Bosanquet, Malcolm, Rhees und Smythies rekonstruiert. Auch bei der Arbeit mit den *LFM* ist es wichtig, den Status dieses Textes vor Augen zu haben. Dass es sich um Vorlesungsmitschriften handelt hat einerseits einen besonderen Reiz, weil Wittgenstein seine Zuhörer hier von Grund auf in ein Thema einführt. Andererseits sind die *LFM* eher nicht heranzuziehen, wenn es um Details in den Formulierungen geht.

Eine wichtige Ergänzung zu *BGM + Nachlass*, sowohl für diese Arbeit als auch generell, bieten ferner Texte, die den Zusammenhang zu Wittgensteins später Sprachphilosophie, zum Regelfolgen und seiner normativen Auffassung von Notwendigkeit liefern können, wie insbesondere die *Philosophischen Untersuchungen*, aber auch *Über Gewißheit*.

Ein Großteil von Wittgensteins Material zur Philosophie der Mathematik aus der Zeit von 1929-1934 ist ebenfalls in Buchform als Teile der *Philosophischen Bemerkungen* und der *Philosophischen Grammatik* veröffentlicht worden– allerdings erst später (1964 bzw. 1969) als die *BGM*. In der Forschung wird diese Zeit – mit variierenden Angaben dazu, wie weit sie genau reicht – häufig als „mittlere Periode/Phase" bezeichnet.

Je nachdem, ob man diese mittlere Phase tatsächlich als eigenständige Phase oder eher als Übergangsphase auffasst, kann man sich hiervon mehr oder weniger hilfreiche Ergänzungen zu Wittgensteins später Philosophie der Mathematik versprechen. Ich möchte mich in dieser Frage nicht festlegen und überlasse ihre Klärung spezialisierteren Kommentatoren. Es gibt sicherlich wichtige Ideen aus dieser Zeit, die er später wieder aufgegeben hat, wie z.B. seinen Verifikationismus (vgl. Frascolla 1994) oder die Behauptung, es gäbe eine „unüberbrückbare Kluft zwischen Regel und Anwendung" (PB S.198).[5] Manch zentrale Ideen seiner Spätphilosophie, wie die Idee, dass arithmetische und geometrische Sätze grammatische Regeln ausdrücken, finden sich aber auch schon in seiner mittleren Phase (vgl. PG S.329, 347; PR S.143, 216).

Ich werde mich, wie gesagt, in dieser Arbeit vor allem mit Wittgensteins später Philosophie der Mathematik beschäftigen. Wenn ich gelegentlich vom „mittleren Wittgenstein" oder der „mittleren Phase" spreche, beziehe ich mich damit auf das in *PB* und *PG* veröffentlichte Material.

[5] Beides werde ich in Kapitel 8 bzw. in Kapitel 6 näher erläutern.

Kapitel 5

Begriffserläuterungen und Terminologie

Im Folgenden werde ich Terminologie zur Unterscheidung verschiedener Typen „mathematischer Sätze“ und mathematischer Beweise einführen, die ich in dieser Arbeit durchgängig verwenden werde.

Obwohl diese Terminologie maßgeblich von meiner Interpretation Wittgensteins inspiriert ist, handelt es sich dabei *nicht* um Wittgensteins eigene Terminologie. Übereinstimmungen und Unterschiede werde ich sowohl hier kenntlich machen als auch, dort wo sie relevant sind, in den nachfolgenden Kapiteln kommentieren.

5.1 Mathematische Wort-Symbol Ketten

Einen Komplex aus Wörtern und Symbolen, der

(a) syntaktisch korrekt gebildet ist und der Form nach einen Aussagesatz darstellt (oder durch die Einführung von logischen Konnektoren in einen solchen überführt werden kann) sowie

(b) ausschließlich mathematische Wörter und Symbole/Terme enthält bzw. solche, die innerhalb der Mathematik verwendet werden,

nenne ich eine *mathematische Wort-Symbol Kette.*

Beispiele sind:

(i) 106+78=184

(ii) 17 und 33 ergibt 14

(iii) Vermutung (Goldbach). Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.

(iv) Integralsatz von Cauchy. Sei γ ein nullhomologer Zykel im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(v) Jeder Endomorphismus eines reellen Vektorraums ist diagonalisierbar. (falsch)

(vi) Definition Gruppe (durch Angabe der Gruppenaxiome). Eine Gruppe ist ein Tupel $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$ für die gilt:

- $\forall_{a,b,c\in G} : (a * b) * c = a * (b * c)$,
- $\exists_{e\in G}\forall_{a\in G} : a * e = e * a = a$,
- $\forall_{a\in G}\exists_{a^{-1}\in G} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(vii) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $n+1$. (Axiom von Peano)

(viii) $K_{Schraub} := \{(t, \sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

Drei wichtige Subtypen von mathematischen Wort-Symbol Ketten sind im Folgenden von besonderem Interesse[1]:

(1) Als *mathematische Regeln* bezeichne ich diejenigen Wort-Symbol Ketten, die innerhalb der Mathematik als akzeptierte Ausgangspunkte für weitere Folgerungen verwendet werden dürfen.[2]

[1] Ein weiterer wichtiger Subtyp von mathematischen Wort-Symbol Ketten, sind Negationen mathematischer Sätze, welche im letzten Abschnitt von Kapitel 8 diskutiert werden.

[2] Der Einfachheit halber lasse ich hier außer Acht, dass es sich streng genommen dabei natürlich nicht um Regeln handelt, sondern um Sätze, die Regeln ausdrücken. Ferner ist zu bemerken, dass der so eingeführte Begriff „mathematische Regel“ nicht unbedingt mit der üblichen Verwendung des Terms übereinstimmt. Insbesondere umfasst er Axiome und Definitionen, die üblicherweise von den sogenannten Schlussregeln unterschieden werden.

(2) Als *mathematische Sätze* bezeichne ich diejenigen Wort-Symbol Ketten, die bewiesen (im weiter unten erklärten „weiten“ Sinne von bewiesen) bzw. durch einen Beweis validiert sind.

(3) Als *mathematische Satzkandidaten* bezeichne ich diejenigen Wort-Symbol Ketten, die, nach dem gegenwärtigen Stand der Forschung, gegen keine bereits etablierten semantisch Regeln verstoßen und nicht als mathematische Regeln (gemäß (1)) verwendet werden.

Zu dieser Liste ist anzumerken, dass sie keinesfalls vollständig ist und dass „mathematische Sätze“ (2) ihrerseits Subtypen von „mathematischen Regeln“ (1) sind.

Gelegentlich werde ich abkürzend „Wort-Symbol Kette“ oder „Satzkandidat“ bzw. „Kandidat“ verwenden – „mathematischer Satz“ und „mathematische Regel“ werden hingegen aus den offensichtlichen Gründen nicht abgekürzt.

Es ist wichtig zu bemerken, dass der Ausdruck „mathematischer Satz“ somit im Folgenden nicht in Übereinstimmung mit der mathematischen Praxis verwendet wird, wo nur bestimmte, etwa besonders wichtige und hinreichend anspruchsvolle, verifizierte Wort-Symbol Ketten als „Sätze“ (bzw. gelegentlich auch als „Theoreme“ oder „Propositionen“) bezeichnet werden, wie z.B. (iv) und andere z.B. als „Lemma“ oder „Korollar“ oder gar nicht mit einem eigenen Ausdruck bezeichnet werden.[3] Insbesondere umfasst dieser Ausdruck auch solche Gleichungen und Zusammenhänge, die sich zwar verifizieren lassen, die aber zu trivial oder irrelevant sind, um selbst als „Satz“ (im Sinne der in der Mathematik üblichen Verwendung), Lemma oder Korollar bezeichnet zu werden, wie (i). Dazu zählen z.B. Zwischenergebnisse in Beweisen oder Resultate, die sich aus der Anwendung allgemeiner Algorithmen oder Verfahren auf konkrete Fälle ergeben.

[3] Ich behaupte hiermit weder, dass diese Bezeichnungen in der der Praxis völlig einheitlich verwendet werden, noch dass sie sich hier überhaupt trennscharfe Bezeichnungen einführen ließen. Eine terminologische und begriffliche Klärung dieser Begriffe wäre sicherlich interessant und auch für Mathematikerinnen aufschlussreich, ist aber hier nicht mein Thema. Es lässt sich aber mit Sicherheit sagen, dass in der mathematischen Praxis solche Unterscheidungen in der Bezeichnung gemacht werden und auch weitgehende Einigkeit über paradigmatische Fälle herrscht.

Hier geht es lediglich darum für die Zwecke meiner Darstellung einen Sammelbegriff einzuführen.

Axiome und Definitionen, wie (vi), (vii) und (viii), sind hingegen in diesem Sinne keine mathematischen Sätze, obwohl Wittgenstein sie gelegentlich also solche bezeichnet. Sie bilden, zusammen mit den mathematischen Sätzen diejenigen Sätze (1), die mathematische Regeln ausdrücken, hier wieder in Übereinstimmung mit Wittgenstein.

Der Ausdruck „mathematische Regeln" umfasst also, sowohl hier als auch für Wittgenstein, alle Regeln, die durch diejenigen Sätze (hier jetzt im herkömmlichen, linguistischen Sinne) ausgedrückt werden, die innerhalb der Mathematik als akzeptierte Ausgangspunkte weiterer Folgerungen und Umformungen verwendet werden.

Mathematische Vermutungen und offene Probleme, wie z.B. (iii), gehören zu den mathematischen Satzkandidaten (3). Sie unterscheiden sich in der Art und Weise, wie Mathematikerinnen mit ihnen umgehen. Während diese bei einer Vermutung ihre Bemühungen darauf richten, einen Beweis für den Satzkandidaten zu erbringen, suchen sie bei offenen Problemen sowohl nach Beweisen als auch nach Widerlegungen.

Bedingung (b) unterscheidet sich von Wittgensteins Terminologie, indem sie solche Sätze wie „Wenn man sechs Stücke Kuchen gleichmäßig unter drei Kindern verteilt, erhält jedes zwei Stücke." aus der reinen Mathematik ausschließt. Anders als „Kuchen" oder „Kinder" werden solche Wörter wie „ist", „ergibt" oder „alle" auch häufig in der Mathematik verwendet. So handelt es bei „6:3=2" oder „6 durch 3 ergibt 2" um mathematische Sätze im Sinne der obigen Definition. Wittgenstein argumentiert zu Recht dafür, dass ob etwas als mathematischer Satz fungiert von seinem Gebrauch abhängt und nicht von seiner Form (vgl. 6.2 (Funktion $\neq$ Form)). Demnach kann der Satz über die Kinder und den Kuchen in manchen Kontexten durchaus als mathematischer Satz funktionieren. Um die Terminologie aber nicht unnötig weiter zu verkomplizieren, lasse ich diesen Aspekt für den Moment außen vor und erwähne ihn im Folgenden dort, wo er relevant wird.

5.2 Mathematische Beweise

Mathematische Sätze drücken, gemäß Wittgenstein, Regeln aus. Streng genommen kann man daher nicht davon sprechen, dass sie sich verifizieren lassen – wie ich im Kapitel 7 darlegen werde, lassen Regeln sich generell nicht verifizieren oder falsifizieren, weil sie nicht deklarativ sind (vgl. 6.2); sie behaupten nicht, dass irgendetwas der Fall ist. Sie sind gültig, nicht wahr. Regeln lassen sich allerdings sehr wohl begründen. Und alle mathematischen Sätze bedürfen tatsächlich einer solchen Begründung – durch einen Beweis – um als solche akzeptiert zu werden. Obwohl mathematische Sätze die Funktion von Regeln haben, haben sie die Form von Aussagesätzen (vgl. 6.2.2) und wir sprechen üblicherweise von der „Wahrheit" mathematischer Sätze, die durch einen entsprechenden Beweis „gezeigt" wird. Ich werde der Einfachheit halber deshalb trotzdem beide Ausdrücke – „begründen" und „beweisen/verifizieren" – verwenden, um zu beschreiben, was mathematische Beweise tun.

Ich unterscheide drei Kategorien von Beweisverfahren (aus mathematischer Sicht) bzw. Validierungsverfahren (aus Wittgensteinianischer Sicht) für mathematische Sätze:

(I) Verfahren, die einem etablierten Schema folgen, wie z.B. arithmetische Rechnungen, Bestimmung der Länge der Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck dessen Hypothenusenlängen bekannt sind oder der Nachweis, dass eine gegebene (und nicht zu große) Zahl prim ist,

(II) mathematische Beweise innerhalb eines Kalküls, die eine synthetisch kreative Leistung voraussetzen, d.h. die Art von Beweisen mit den sich Mathematikerinnen in der Regel am häufigsten befassen und schließlich

(III) mathematische Beweise, die eine völlig neue Technik (z.B. Diagonalverfahren), einen völlig neuen Kalkül (z.B. Galoistheorie für Konstruierbarkeitsbeweise) benutzen. Dabei ist jedoch in Bezug auf die Einführung neuer Kalküle folgendes zu bemerken: Diese Kalküle werden zwar zu dem Zweck entwickelt und eingeführt, den fraglichen Satzkandidaten beweisen zu können, die Einführung des neuen Kalküls gehört aber nicht zum Beweis selbst. Der Beweis wird vielmehr im Anschluss an die Erfindung des neuen Kalküls innerhalb dessen geführt, wie in (II) oder gar in (I).

Wenn ich im Folgenden von Beweisen spreche, so schließe ich, in Übereinstimmung mit Wittgensteins Verwendungsweise, die Verifikationsverfahren vom Typ I ein. Die Beweise vom Typ II und III – d.h. die Verifikationsverfahren, die man typischer Weise vor Augen hat, wenn man in der mathematischen Praxis von Beweisen spricht – bezeichne ich als *Beweise im engeren Sinn*. Die Unterscheidung zwischen Verfahren vom Typ I und Beweisen im engeren Sinne, also dazwischen, was reines Anwenden von Lösungsroutinen ist und was ein kreatives Zusammenbringen etablierter Regeln ist, ist sicherlich keine scharfe Unterscheidung und mag bei verschiedenen Individuen unterschiedlich verlaufen. Jedoch kann festgehalten werden, dass Mathematikerinnen einen solchen Unterschied machen.

Obwohl es sich bei den Beweisen vom Typ II eigentlich um die stereotypischen Beispiele mathematischer Beweise handelt, werden Beweise dieses Typs in Wittgensteins Betrachtungen typischerweise vernachlässigt.[4]

[4] Dies heben auch Glock 1996, Kapitel „mathematical proof" und Schroeder 2012, S.466 hervor.

Teil III

[D]as Ende der Begründungen
ist nicht die unbegründete
Voraussetzung, sondern die
unbegründete Handlungsweise.

L. Wittgenstein (ÜG §110)

Kapitel 6

Mathematik und Regelfolgen

– eine Neubewertung der Bedeutung der Regelfolge-Überlegungen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik

6.1 Problemstellung

Als *Regelfolge-Überlegungen* – im Folgenden abgekürzt durch *RfÜ* – werden in der Literatur üblicherweise die Paragraphen §§185-242 der *Philosophischen Untersuchungen* bezeichnet.

Wie in der Einleitung dargelegt, liegt die Motivation für die Beschäftigung mit diesen Paragraphen in diesem Kapitel in erster Linie in Folgendem: Eine bestimmte Interpretationsrichtung, die die Debatte um Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik nachhaltig geprägt und behindert hat, beruht auf verschiedenen Fehlinterpretation der RfÜ (vgl. 3.2.1).

Bevor ich auf diese Debatte eingehe und mein Vorhaben für dieses Kapitel skizziere, möchte ich zunächst einige Überlegungen anstellen, ob und inwiefern diese Paragraphen aus den *PU* aus exegetischer Sicht für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik relevant sind.

6.1.1 Mathematik und Regelfolge-Überlegungen aus exegetischer Sicht

Als erstes stellt sich sogar die Frage, warum eine Beschäftigung mit den *Philosophischen Untersuchungen* überhaupt fruchtbar sein sollte. Mathematik spielt darin schließlich keine nennenswerte Rolle.

Es spricht allerdings einiges dafür, dass Wittgenstein selbst das Material aus den *PU* auch für seine Philosophie der Mathematik für inhaltlich relevant gehalten hat. In der *Frühfassung* der *Untersuchungen* hatte Wittgenstein sogar noch geplant, den in etwa §§1-189 entsprechenden Teil nicht mit Bemerkungen zur Philosophie der Psychologie, sondern zur Philosophie der Mathematik fortzusetzen, nämlich mit einer Frühfassung des Teil I der *BGM* (TS 221). Die gemeinsamen Wurzeln dieser beiden Bereiche werden auch in der letzten Bemerkung von *Philosophie der Psychologie – Ein Fragment* (dem ehemals sogenannten[1] *Teil II der PU*) unterstrichen:

> Es ist für die Mathematik eine Untersuchung möglich ganz analog unsrer Untersuchung der Psychologie. [...] Sie könnte den Namen einer Untersuchung der ›Grundlagen der Mathematik‹ verdienen. (PPF xiv §372)

Auch wenn es laut Hacker & Schulte keinen Grund gibt anzunehmen, dass Wittgenstein geplant hatte, die Bemerkungen aus *PPF* in die *PU* aufzunehmen (Hacker & Schulte 2009, S.xxii-xxiii), wie die ursprünglichen Herausgeber der *PU* behaupten, lässt sich diese Bemerkung zum Verhältnis zwischen Philosophie der Psychologie und Philosophie der Mathematik durchaus auf die *PU* übertragen (vgl. dazu auch Baker & Hackers Kapitel *Two fruits upon one tree* (Baker & Hacker 2009, S.3-21)).

Ferner scheint für die inhaltliche Relevanz der *PU* für die Philosophie der Mathematik zu sprechen, dass Wittgenstein im Vorwort der *PU* schreibt, dass diese u.a. mit den „Grundlagen der Mathematik“ befasst sind. In Anbetracht der Entstehungsgeschichte der *PU*[2] muss diese Erwähnung jedoch vorsichtig beurteilt werden. Das Vorwort der *PU* entstand im Januar 1945 als Vorwort zu der sogenannten *Zwischenfassung* und wurde, in leicht überarbeiteter Form, in die ein bis zwei Jahre später mehr oder weniger abgeschlossene *Spätfassung* übernommen. Noch im Frühjahr 1944 hatte Wittgenstein intensiv zur

[1] Zur Begründung, warum diese ehemalige Bezeichnung nicht angemessen ist, vgl. Einleitung der englischen Neuübersetzung der *PU* von Hacker & Schulte (2009).

[2] Siehe dazu die kritisch-genetische Ausgabe der *PU* (Schulte 2001).

Philosophie der Mathematik gearbeitet. Laut Schulte[3] darf man daher mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen, dass er damals plante, einen zweiten Teil oder zweiten Band mit Bemerkungen über Themen aus dem Bereich der Philosophie der Mathematik zusammenzustellen. Die Erwähnung der „Grundlagen der Mathematik“ im Vorwort vom Januar 1945 ist, Schultes Auffassung nach, vor diesem Hintergrund zu sehen. Darüber, ob die Erwähnung der „Grundlagen der Mathematik“ nach der Überarbeitung der *Zwischenfassung* bewusst oder aus Versehen stehen geblieben ist, lässt sich hingegen nur spekulieren. Immerhin wäre jedenfalls nicht bekannt, dass Wittgenstein je explizit beschlossen hätte, nicht mehr zu seinen Arbeiten zur Philosophie der Mathematik zurück zu kehren, die faktisch im Frühjahr 1944 enden.

Es ist ferner hervorzuheben, dass den *PU* innerhalb des Wittgenstein'schen Spätwerks eine besondere Stellung zukommt. Im Gegensatz zu allen anderen Teilen von Wittgensteins *Nachlass* waren sie von ihm tatsächlich zur Publikation vorgesehen. Sie sind also besser ausgearbeitet und geben wirklich Wittgensteins definitive Auffassungen zu den behandelten Themen wieder, wenngleich auch nur zu einem bestimmten Zeitpunkt. Allein deshalb sind sie natürlich besonders relevant in der Interpretation jenes Spätwerks und sollten, dort wo sie für die Philosophie der Mathematik relevant sind, entsprechend berücksichtigt werden.

Warum sind nun innerhalb der *PU* speziell die *Regelfolge-Überlegungen* von Interesse für Wittgensteins Philosophie der Mathematik?

Zunächst gibt es eine offensichtliche Verbindung zwischen *Regeln* und Mathematik in Wittgensteins Philosophie: Mathematische Sätze, Definitionen und Axiome drücken ihm zufolge Regeln aus. Mathematiker *folgen* mathematischen und logischen Regeln in der Herstellung neuer mathematischer Regeln[4]. Und Anwender von Mathematik (z.B. Naturwissenschaftler) verwenden mathematische Regeln als Transformationsregeln und Sinnkriterien in empirischen Beschreibungen.

Des weiteren spielen Überlegungen zum Regelfolgen auch in den

[3]Persönliche Korrespondenz.

[4]Inwiefern sie dabei nicht nur Axiome und Schlussregeln, sondern auch in mathematischen Sätzen ausgedrückte Regeln verwenden, werde ich in Kapitel 8 erläutern.

BGM + Nachlass eine zentrale Rolle: Über die Hälfte der Bemerkungen aus den RfÜ sind auch in den *BGM* enthalten (§§189-197, §199, §207, §209, §212, §214, §227, §§230-238, §§240-242),[5] ergänzt durch weitere Bemerkungen zum Regelfolgen, die in den *PU* nicht enthalten sind.

Laut Baker & Hacker hätten die RfÜ aus inhaltlicher Sicht auch Vorbemerkungen zu Wittgensteins Bemerkungen zu logischen und mathematischen Schlüssen seien können:

> At the cost of a certain amount of rearrangement and perhaps some supplementation of the early text, it seems that Wittgenstein could have separated out the remarks on rules, accord with a rule and following rules, and then treated these as a preface to his discussion of logical inference and mathematical proof. The result might have been something like the published text of §§189–242, followed by material on philosophy of mathematics rather than on the 'private language' and its sequel.(Baker & Hacker 2009, S.6-7)

Unterstützt finden sie diese These dadurch, dass Wittgenstein 1943-44 tatsächlich in etwa einen solchen Plan zu haben schien (vgl. MS 165 S.30ff.).

Und schließlich, so könnte man anbringen, wird in den RfÜ sogar ein mathematisches Beispiel verwendet, wenngleich ein sehr elementares. Ich werde allerdings dafür argumentieren, dass sich dieses Beispiel nicht unmittelbar auf Regeln der höheren Mathematik übertragen lässt (6.4.1). Gleichwohl, so werde ich indes auch zeigen, sind die RfÜ in anderer Hinsicht sicherlich relevant für Wittgensteins Philosophie der Mathematik, insbesondere für die Frage, ob und inwiefern sich sinnvollerweise von den „Grundlagen“ der Mathematik sprechen lässt (6.5.2) – insofern erscheint mir deren Erwähnung im Vorwort der *PU*, welchen Ursprung sie auch immer tatsächlich haben mag, durchaus passend.

[5] Vgl. die Tabelle in Baker & Hacker 2009, S.33-34.

6.1.2 Mathematik und Regelfolge-Überlegungen in der Debatte

Wie bereits betont, ergeben sich aber fast noch gewichtigere Gründe für eine Auseinandersetzung mit den RfÜ im Zusammenhang mit Wittgensteins später Philosophie der Mathematik extern und zwar aus der Debatte um diese.

Eine der frühsten und einflussreichsten Interpretationen der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* ist diejenige von Michael Dummett (1959). Notorisch ist seine darin vertretene These, Wittgensteins normative Auffassung von Notwendigkeit[6] führe zu einem „vollblütigen Konventionalismus"[7] bezüglich mathematischer Sätze. Danach würde jeder mathematische Satzkandidat eine neue potentielle linguistische Konvention ausdrücken, die unabhängig von bereits getroffenen Entscheidungen bezüglich anderer linguistischer Konventionen, d.h. insbesondere unabhängig von Definitionen, Axiomen oder anderen mathematischen Sätzen, angenommen oder verworfen werden kann.

Dieser radikale Konventionalismus ist laut Dummett, eine Konsequenz *aus Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen.* Aus seiner Sicht schließen die RfÜ nämlich aus, dass objektiv beurteilt werden kann, was an einer konkreten Stelle die einer bestimmten Regel gemäße Handlung ist. Und die dadurch entstehende Kluft zwischen Regel(-ausdruck) und Anwendung muss daher durch eine (willkürliche) Entscheidung überbrückt werden.

Unseren Vorstellung von und Erfahrungen mit Mathematik und insbesondere mathematischen Beweisen läuft diese Auffassung sicherlich zuwider. Peter Hacker drückt dies in seiner weniger diplomatischen Art so aus:

> [T]he price of full-blooded conventionalism is a theory of necessary truth and a priori knowledge that is wildly implausible – a form of extreme voluntarism or mathema-

[6] Dummett selbst erwähnt den normativen Aspekt nicht. Er spricht lediglich von Wittgensteins „account of logical necessity".

[7] In der Literatur spricht man gelegentlich auch von „radikalem Konventionalismus".

tical existentialism. (Baker & Hacker 2009, S.357)

Den „vollblütigen Konventionalismus“ als eine Position zu bezeichnen, die „extremely hard to swallow“ oder „extraordinarily difficult to take (...) seriously“ (Ibid., S.332) ist, wie Dummett selbst dies tut, ist in der Tat fast noch beschönigend. Sie scheint vielmehr im eklatanten Widerspruch zur tatsächlichen mathematischen Praxis zu stehen. Denn wenn die Akzeptanz von Beweisen und mithin von mathematischen Sätzen eine Sache der (willkürlichen) Entscheidung ist, so fragt man sich: Warum brauchen wir dann überhaupt noch Beweise und entscheiden nicht direkt darüber? Hier wäre also Kreisels Frage (in einer leicht umformulierten Variante), warum es in *diesem Fall* überhaupt Beweise braucht, wahrlich angebracht (Kreisel 1958, S.140; vgl. 3.2.1).

Tatsächlich führen wir aber Beweise und halten das sogar für absolut zentral für unsere mathematische Praxis. Und ferner begründen wir die verschiedenen Übergänge im Beweis im Rekurs auf bereits etablierte Regeln. Falls Dummetts Interpretation zuträfe, oder, schlimmer noch, falls Wittgenstein durch seine normative Auffassung von Notwendigkeit auf einen vollblütigen Konventionalismus verpflichtet wäre, so würde das seine Philosophie der Mathematik, die er selbst ja, zumindest 1944, für seinen bedeutendsten philosophischen Beitrag gehalten hat,[8] zumindest vor gravierende Probleme stellen.

Dummetts Befund wird natürlich längst nicht von allen geteilt, insbesondere nicht von denjenigen Interpreten, die Wittgensteins später Philosophie der Mathematik grundsätzlich positiv gegenüberstehen. Dort trifft Dummett zwar teilweise auf harsche Ablehnung (wie z.B. bei Hacker s.o.), aber eine detaillierte Auseinandersetzung mit Dummetts Interpretation bleibt oft aus.[9]

[8]Vgl. Monk 1990, S.467; vgl. Einleitung.

[9]Eine Ausnahme ist die direkte Erwiderung auf Dummetts Kommentar von Stroud (1965). Diese Erwiderung ist allerdings ihrerseits zu Recht kritisiert worden (z.B. von Baker & Hacker (2009) und Wright (1980)) und findet oft noch nicht mal mehr Erwähnung (z.B. von Frascolla (1994), Marion (1998) oder Mühlhölzer (2010)). Ferner setzt sich natürlich Wright (1980) intensiv mit Dummetts Interpretation auseinander; sein Buch ist nach eigenen Aussagen ebenso sehr eine Auseinandersetzung mit Dummett wie mit Wittgenstein. Dies führt allerdings dazu, dass er, obwohl er Dummett an vielen Stellen widerspricht, zu sehr in dessen systematischen Kategorien verhaftet bleibt, um Wittgensteins Gedanken tatsächlich

Laut Mühlhölzer beispielsweise, bewegen sich „die Gedanken Dummetts in allzu großer Entfernung von denjenigen W.s“, so dass „man die Denkweise von W. nur verfehlen kann, wenn man sie in die Dummett’schen Kategorien pressen möchte“ (Mühlhölzer 2010, S.48), weshalb er in seinem Kommentar auf eine Auseinandersetzung mit Dummett weitgehend verzichtet.

Während dies für einen Textkommentar durchaus sinnvoll erscheint, gibt es aus Sicht der Debatte um Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik gute Gründe für eine Beschäftigung mit Dummetts Kommentar. Dieser gilt nämlich keinesfalls gemeinhin als überholt. Vielmehr stellt er weiterhin einen wesentlichen Bezugspunkt in der Interpretation von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik dar (vgl. Frascolla 1994, S.120, fn.7), der die Debatte um diese nachhaltig beeinflusst hat (vgl. Baker & Hacker 2009, S.xiii; auch Mühlhölzer 2010 bemerkt, dass Dummetts Kommentar und nachfolgende Publikationen „bis heute von großem Einfluß“ für die Deutung der Wittgenstein’schen Spätphilosophie im angelsächsischen Raum sind).

Die Überzeugung, es lasse sich nicht objektiv beurteilen, worin die korrekte Anwendung einer Regel an einer konkreten Stelle besteht, wird in der Literatur, im Anschluss an Kripke (1982), *Regelskeptizismus*[10] genannt.[11]

Ob und inwiefern Wittgenstein in den RfÜ tatsächlich für einen solchen Regelskeptizismus argumentiert, ist nach dem Erscheinen von Kripkes Buch zwar kontrovers diskutiert und auch vielfach in Frage gestellt worden, ohne dass allerdings ein weitgehender Konsens erreicht

---

entscheidend näher zu kommen (vgl. dazu auch Mühlhölzer 2010, S.48).

[10]Später spricht Dummett auch selbst von Wittgensteins „Skeptizismus“ (Dummett 1994, S.63); vgl. Mühlhölzer 2010, S.47-48.

[11]Es ist zu Recht moniert worden, dass diese Position eigentlich keine skeptische ist (vgl. Schroeder 2006, S.197). Eine Regel, die keinen Standard festlegt, nach dem Verhalten als korrekt oder inkorrekt beurteilt werden kann, ist, allein aus begrifflichen Gründen, keine Regel. Der angebliche ‚Regelskeptizismus‘ verneint also eigentlich die Existenz von Regeln und mithin die Möglichkeit, ihnen zu folgen. Und folglich können wir gar nicht sinnvoll zweifeln, ob ein bestimmtes Verhalten der Regel (die es nicht gibt) gemäß ist.

Glock spricht auf Grund derselben Überlegung auch von „semantic *nihilism*“ (Glock 1996, 2015a).

Weil der Ausdruck „Regelskeptizismus“ aber in der Debatte etabliert ist, werde ich ihn aus pragmatischen Gründen trotzdem verwenden.

wurde (wie sich an Publikationen wie Kusch 2006 zeigt). Vor allem aber läuft diese Debatte in jüngerer Zeit weitgehend unabhängig von der Debatte um Wittgensteins Philosophie der Mathematik ab, in der die skeptische Interpretation weiterhin durchaus Anhänger findet. Ein solcher Anhänger ist beispielsweise der bereits erwähnten Frascolla (1994) und erst jüngst hat Potter in seinem Artikel „Wittgenstein on Mathematics“ im *Oxford Handbook* zu Wittgenstein erneut behauptet, „the ‘unbridgeable gulf between rule and application’“ sei die Essenz von Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen (Potter 2011, S.132).

Es gibt in der Debatte um die Regelfolge-Überlegungen meiner Ansicht nach Interpretationen, die sowohl der skeptischen Interpretation klar widersprechen, als auch exegetisch überzeugen, wie Baker & Hacker (2009), Schroeder (2006), Glock (1996) oder auch Goldfarb (2012). Diese Autoren werten ihre Interpretationen allerdings nicht in Bezug auf deren Konsequenzen für Wittgensteins Philosophie der Mathematik aus; aber gerade das erscheint notwendig.

Im Folgenden werde ich aus dem Blickwinkel der genannten Interpretationen im Detail erläutern, an welchen Stellen Dummetts Interpretation schiefgeht (6.3). Ferner werde ich weitere in der Debatte verbreitete Missverständnisse bezüglich der Rolle von Regelausdrücken (6.4) und der Rolle lebensweltlicher Praktiken (6.5.1) aufklären, die ebenfalls aus den RfÜ abgeleitet werden.

Zur Interpretation der RfÜ werde ich dabei nichts wesentlich Neues beitragen. Die meisten im Folgenden genannten Punkte finden sich bereits bei den oben genannten Autoren. Aber ich werde sie bezüglich ihrer Konsequenzen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik neu evaluieren.

Bevor ich mit dieser Arbeit beginne, möchte zunächst ich in kompakter Form darstellen, was Wittgenstein meiner Auffassung nach unter einer Regel versteht (6.2).

6.2 Wittgensteins Regelbegriff

Wichtig ist zunächst zu bemerken, dass „Regel“[12] gemäß Wittgenstein ein Familienähnlichkeitsbegriff ist, der folglich nicht durch eine analytische Definition beschrieben werden kann, sondern sich am besten anhand von Beispielen erläutern lässt (PG S. 116-18; AWL S.153-55; BGM VI §12). Anhand der von Wittgenstein diskutierten Beispiele lassen sich trotzdem einige zentrale Merkmale herausarbeiten. Siehe auch Baker & Hacker 2009, Kapitel II, sowie Glock 1996, Kapitel „rule-following“ und Glock 2015a.

6.2.1 Regeln und Regelfolgen

(Normativität) Regeln funktionieren nicht deskriptiv sondern normativ. D.h. sie beschreiben nicht, wie Menschen z.B. rechnen, sprechen, Schachspielen oder schwimmen, sondern legen fest, was es heißt, diese Tätigkeiten korrekt auszuführen. Sie liefern Maßstäbe an denen Verhalten als korrekt oder nicht-korrekt beurteilt werden kann.

Entgegen ihrer Bezeichnung sind sogenannte Bauernregeln, wie z.B. „Wie das Wetter am Siebenschläfer sich verhält, so ist es sieben Wochen lang bestellt.“ also keine Regeln. Sie stellen eher (nicht immer besonders erfolgreiche) empirische Prognosen auf. Wenn es am 27. Juni regnet und dann die darauffolgenden zwei Wochen die Sonne scheint, würden wir nicht das Wetter, sondern die „Regel“ als inkorrekt bezeichnen. Ebenso sind Naturgesetze, obwohl prognostisch wesentlich erfolgreicher als Bauernregeln, keine Regeln und folglich auch keine Gesetze im eigentlichen Sinn (sie schreiben der Natur nicht vor, wie sie sich zu verhalten hat). Zieht hingegen ein Schachspieler seinen Bauern drei Felder diagonal, so ist dieser Zug inkorrekt und nicht die Zugregeln für Bauern.

(Definitorischer Aspekt) Oft definieren die durch die Regel fest-

[12] Wittgenstein verwendet gelegentlich, wenngleich sehr selten, auch das Wort „Norm“ anstelle von „Regel“. Laut Glock 2015b gibt es keinen philosophisch relevanten Unterschied zwischen beiden Begriffen und so weit ich sehen kann, gibt es auch in Wittgensteins Verwendung keinen solchen Unterschied.

Im Gegensatz dazu charakterisiert das Adjektiv „normativ“ allerdings nicht nur Regeln, sondern auf Befehle, Kommandos usw.

gelegten Standards zumindest teilweise, was es überhaupt heißt, die entsprechende Tätigkeit auszuführen. Schach zu spielen, beispielsweise, heißt, nach den Regeln des Schachspiels zu handeln. Die einzelnen Schachregeln legen folglich Teilaspekte dessen fest, was es heißt Schach zu spielen. Regeln sind also oftmals *konstitutiv* für die jeweilige Tätigkeit, die sie regeln. „4 + 1“ zu addieren *heißt* „5“ zu erhalten (BGM III §24, vgl auch VI §16).

Dabei lassen wir gewisse Abweichungen zu: Wenn der Schachspieler von oben sich ansonsten üblicherweise beim Schachspielen regelgemäß verhält, würden wir sicher nicht sagen, er habe aufgehört Schach zu spielen, wenn er den Bauern drei Felder diagonal zieht, sondern vielleicht, er habe den Bauern mit einem Läufer verwechselt, für den dieser Zug in diesem Fall möglich gewesen wäre. Sein *Zug* wäre dann allerdings kein *Schachzug*.

Hacker behauptet, dass gemäß Wittgenstein allen Regeln ein solcher „definitorische Aspekt“ Baker & Hacker (2009, S.50) innewohnt. Ob dies exegetisch korrekt ist, vermag ich nicht zu beurteilen. Aus systematischer Sicht ist diese Behauptung jedenfalls problematisch. Es gibt schließlich auch Regeln die lediglich angeben, wie eine Tätigkeit *optimaler Weise* auszuführen ist, wobei die Tätigkeit *unabhängig* von der Regel definiert werden kann. In der Literatur werden solche Regeln im Unterschied zu definitorischen *konstitutiven* Regeln als *regulative Regeln* bezeichnet (Searle 1969). So widerspricht eine Begrüßung der Queen per Handschlag und mit Schulterklopfen sicherlich den Regeln des Protokolls, es ist aber dennoch eine Begrüßung.

Allerdings, so könnte man einwenden, definieren die Regeln des Protokolls, was heißt, die Queen *nach den Regeln des Protokolls* zu begrüßen. In diesem trivialen Sinne – dass die Regel definiert, was es heißt nach ihr zu handeln – sind gemäß Wittgenstein in der Tat alle Regeln konstitutiv.

Logische und mathematische Regeln, sowie grammatische Regeln der natürlichen Sprache gehören jedenfalls für Wittgenstein klarer Weise zu den konstitutiven Regeln.[13]

[13] Auch wenn Anti-Normativisten bestreiten würden, dass er damit Recht hat. Für eine Verteidigung der systematischen Position siehe Glock 2015b.

(Intentionalität) Es gibt einen Unterschied zwischen „nach einer Regel handeln“ und bloß „in Übereinstimmung mit einer Regel handeln“. Regelfolgen ist intentional. Regelgemäßes Verhalten ist zwar eine notwendige (PU §207, 240; BGM I §61), aber keine hinreichende Bedingung für Regelfolgen. Jemand, der einer Regel folgt, muss dabei *auf Grund* der entsprechenden Regel so handeln, wie er handelt (PU §222, PU §232). Das heißt nicht unbedingt, dass er beim Befolgen der Regel an diese Regel denken müsste. Aber wenn gefragt, muss er als Grund auf die Regel verweisen – mindestens in der Form: „So ist es richtig!“

Wenn ein Roboter Socken nach ihrer Farbe sortiert, folgt er dabei also *keiner* Regel.

(Allgemeinheit) Regeln sind inhärent allgemein (AWL S.155); sie regeln eine *unbegrenzte* Anzahl von Fällen. Damit unterscheiden sie sich von Befehlen und Kommandos, die auch normativ sind und intentional befolgt werden, aber nur einzelne, konkrete Anlässe regeln. Diese Art von Allgemeinheit ist charakteristisch für alle Regeln und nicht zu verwechseln mit der Art von Allgemeinheit, die ‚allgemeinen Regeln‘ zukommt, d.h. mit der Frage, ob Regelausdrücke Ausdrücke von Allgemeinheit enthalten oder nicht. Beispiele: „Bring mir die Platte!“ und „Bring mir alle Platten von dort drüben!“ sind beides Befehle, die für eine bestimmte Situation gelten, auch wenn letzterer einen Ausdruck von Allgemeinheit enthält. „Der Läufer zieht diagonal.“ und „Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.“ (Satz von Bolzano-Weierstrass) sind beides Regeln, die eine unbegrenzte Anzahl von Fällen regeln, obwohl nur letztere einen Ausdruck von Allgemeinheit enthält, d.h. eine allgemeine Regel ist. In Glocks Terminologie: Regeln sind kontextsensitiv, aber okkasional neutral (vgl. Glock 2015a)

(Regelfolgen) *Regelfolgen* ist dementsprechend das intentionale Handeln gemäß einer Regel.

(Erfolgsverb) Regelfolgen ist ein Erfolgsverb. Es gibt einen Unterschied zwischen „glauben einer Regel zu folgen“ und ihr tatsächlich zu folgen (PU §202).

6.2.2 Regel vs. Regelausdruck

(Regel ≠ Regelausdruck) Es ist zu unterscheiden zwischen einer Regel und einem Ausdruck dieser Regel. Es gibt verschiedene linguistische Mittel (oder auch nicht-linguistische Mittel, wie z.B. Illustrationen) dieselbe Regel auszudrücken. Z.B. drücken $y = 3x + 17x - \div$ und $y = \frac{3+x}{17-x}$ in verschiedenen Notationen dieselbe Regel aus. Ferner können wir Regeln auch folgen, ohne einen Ausdruck für sie zu kennen (vgl. z.B. ÜG §95: „[D]as Spiel kann man auch rein praktisch, ohne ausgesprochene Regeln lernen.", PU §31). Ein typisches Beispiel wären normalkompetente Sprecherinnen, die ihre Muttersprache grammatisch korrekt sprechen und Nichtmuttersprachler korrigieren können, ohne in der Lage zu sein, die entsprechenden grammatischen Regeln, denen sie dabei folgen, zu formulieren. Daher ist es noch nicht einmal notwendig, dass jede Regel überhaupt einen Ausdruck hat (vgl. auch das Phänomen der „ungeschriebene Regeln".).

Hacker behauptet zwar, dass aus begrifflichen Gründen jede Regel ausgedrückt werden können muss, zumindest durch „explanation by exemplification" (Baker & Hacker 2009, S.66). Dieses Kriterium erscheint jedoch selbst wenn man Exemplifikationen als Regelausdrücke zulässt, worin ich Hacker folgen würde, zu streng. Dafür, dass jemand einer Regel folgt erscheint vielmehr ausreichend, dass er (i) in Übereinstimmung mit der Regel handelt *und* (ii) sich an seinem Verhalten zeigt, dass er versteht, welches Verhalten richtig ist (bzw. akzeptiert wird) und welches falsch (nicht akzeptiert wird) (vgl. *PU* §54; siehe dazu auch Schroeder (2006, S.190-191)).

(Funktion ≠ Form) Ferner sind Regelausdrücke nicht an eine bestimmte Form gebunden. Insbesondere kann eine grammatische Regel durchaus die Form eines Aussagesatzes haben. Beispiele: „Jeder Stab hat eine Länge." (PU §251), „Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist." Und auf der anderen Seite drückt ein Satz, der ein entsprechendes deontisches Verb enthält auch nicht immer eine Regel aus. „Du musst den 46er Bus um 8:45h nehmen." kann zum Beispiel als empirische Aussage fungieren, wenn dieser Satz als Antwort auf die Frage: „Wie komme ich von hier bis um neun zum Hauptbahnhof?" geäußert wird.

Der Unterschied zwischen Regelausdrücken und empirischen Beschreibungen liegt also nicht in der Form der Sätze, sondern in ihrer Verwendung (vgl. Baker & Hacker 2009, S.46; Glock 2015a).

6.3 Vollblütiger Konventionalismus?

Dummett zufolge entwickelt Wittgenstein seinen „vollblütigen Konventionalismus“ bezüglich mathematischer Sätze, als Gegenentwurf zum „moderaten Konventionalismus“ des Wiener Kreises. Gemäß dem moderaten Konventionalismus sind mathematische Sätze implizite Konsequenzen der per Konvention festgelegten mathematischen Axiome und damit selbst (notwendig) wahr auf Grund von Konventionen. Dummett selbst hält diesen Ansatz für unzureichend: Er verfehle sein Ziel, die Notwendigkeit mathematischer Sätze über linguistische Konventionen zu erklären; er setze nämlich voraus, dass aus den gesetzten Axiomen und Schlussregeln notwendig bestimmte mathematische Sätze folgten, anstatt diese Beziehung zu erklären.[14]

Gemäß dem vollblütigen Konventionalismus’, also jener Alternative, die Wittgenstein laut Dummett entwickelt, drückt stattdessen jeder mathematische Satz eine separate neue linguistische Konvention aus, die unabhängig von bereits getroffenen Entscheidungen bezüglich anderer linguistischer Konventionen ist – und damit, wie eingangs bereits erwähnt, insbesondere unabhängig von Definitionen, Axiomen oder anderen mathematischen Sätzen. In Dummetts Worten:

> Wittgenstein goes for a full-blooded conventionalism; for him the logical necessity of any [mathematical] statement[15] is always the *direct* expression of a linguistic convention. That a given statement is necessary consists al-

[14] Baker & Hacker (2009) weisen darauf hin, dass es aus Wittgenstein’scher Sicht durchaus zweifelhaft ist, ob dieser Einwand gegen den moderaten Konventionalismus wirklich zutrifft (S.65 fn.99), ihre Argumentation ist allerdings problematisch. Ihr Punkt ist aber für meine Zwecke hier nicht so wichtig und muss in einer anderen Arbeit kritisch erläutert werden.

[15] Natürlich sind mathematische Sätze für Wittgenstein gerade keine Behauptungen (‚statements‘), sondern Regelausdrücke. Dass Dummett den normativen Aspekt mathematischer Notwendigkeit bei Wittgenstein so hartnäckig ignoriert, leistet auch an anderer Stelle Fehlinterpretationen Vorschub, s. dazu 6.3.6.

> ways in our having expressly decided to treat that very statement as unassailable; it cannot rest on our having adopted certain other conventions which are found to involve our treating it so. (Dummett 1959, S.329)

Begründet wird diese prima facie problematische, da völlig kontraintuitiv erscheinende Position laut Dummett durch Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen:

> [H]ere Wittgenstein brings in *the considerations about rules* presented in the *Investigations* and elsewhere. A proof [of a mathematical proposition] proceeds according to logical principles or rules of inference. [...] [I]n order to follow the proof we have to recognize various transitions as applications of the general rules of inference. Now even if these rules had been explicitly formulated at the start, and we had given our assent to them, our doing so would not in itself constitute recognition of each transition as a correct application of the rule.
>
> [...]
>
> [T]here is nothing in our formulation of the axioms and the rules of inference, and nothing in our minds when we accepted these before the proof was given, which of itself shows whether we shall accept the proof or not; and hence there is nothing which *forces* us to accept the proof.
>
> [...]
>
> In [accepting the proof] we make a new *decision.* (Ibid., S.329-30, meine Hvbgn.)

Aus den Ergebnissen der RfÜ folgt also laut Dummett, dass es eine Sache der *Entscheidung* ist, ob wir eine mathematische Wort-Symbol Kette als mathematischen Satz annehmen.

Und diese Entscheidung ist ferner *willkürlich* in dem Sinne, dass es keine objektiven Gründe gibt, eine Variante einer anderen gegenüber vorzuziehen:[16]

[16] Solange nichts anderes gesagt wird, werde ich „willkürlich“ im Folgenden immer in diesem Sinne verwenden.

> [W]e could have rejected the proof without doing any more violence to our concepts than is done by accepting it; in rejecting it we could have remained equally faithful to the concepts with which we started out. (Ibid., S. 332)
>
> [...]
>
> [Wittgenstein denies] the objectivity of *proof* in mathematics. (Ibid., S.346)[17]

6.3.1 Dummetts Interpretationsthesen

Laut Dummett laufen die RfÜ also auf folgende Thesen hinaus:

(1) Die Formulierungen der Axiome und Schlussregeln (d.h. die Regelausdrücke der bereits akzeptierten mathematischen Regeln) *allein* legen nicht fest, wie diese Regeln in konkreten Fällen anzuwenden sind – und damit auch nicht, ob ein Beweis, d.h. eine Kette von solchen Regelverwendungen, gültig ist.

(2) Beim Festlegen oder Akzeptieren der Regeln geht auch nichts in unserem Kopf vor, was im Voraus festlegt, worin die korrekte Verwendung der Regel in konkreten Fällen besteht – und damit, s.o., auch nichts, was entscheiden würde, ob ein Beweis gültig ist.

(3) *Daher* gibt es nichts, was uns zwingt, einen Beweis zu akzeptieren (was bei Dummett in dem Sinne zu verstehen ist, dass wir den Beweis ebenso gut hätten ablehnen können).

(4) Stattdessen beruht die Akzeptanz jedes neuen Beweises auf einer (willkürlichen (s.o.)) Entscheidung.

Dummett selbst liefert in seinem Kommentar keine exegetischen Belege für diese Interpretation der RfÜ. Im Folgenden werde ich daher prüfen, ob Wittgenstein in den RfÜ oder den entsprechenden Teilen der *BGM* tatsächlich für diese vier Punkte argumentiert und ob er

[17] Diese Interpretation wird geteilt von Cozzo (2004), der dies, im Gegensatz zu Dummett, aber nicht auf die RfÜ zurück führt, sondern aus BGM I §61 schließt, womit er meiner Auffassung nach falsch liegt.

insbesondere durch die RfÜ auf die problematischen Konsequenzen (3) und (4) festgelegt ist.

Dabei werde ich dafür argumentieren, dass die Interpretationsthesen (1) und (2) durchaus zutreffend sind. Ferner hält Wittgenstein es auch für unsinnig zu sagen, eine Regel oder ein Beweis „zwinge" uns zu einem bestimmten Verhalten. Er meint damit aber erstens etwas völlig anderes als Dummett ihm unterstellt. Und zweitens ist die Art von Zwang, die Wittgenstein tatsächlich meint, darüber hinaus auch keine Konsequenz aus (1) und (2). Die Interpretationsthese (4), so werde ich zeigen, ist schließlich gänzlich falsch. Weder behauptet Wittgenstein – in den *BGM* oder den *Untersuchungen* – dass (4), noch ist er durch die RfÜ auf (4) festgelegt; vielmehr widersprechen die RfÜ und einschlägige Bemerkungen aus den *BGM* dieser These sogar.

Kurzum, Wittgensteins RfÜ haben mit vollblütigem Konventionalismus wenig zu tun und er vertritt auch in den *BGM* keinen solchen.

6.3.2 Wittgensteins Kritik an traditionellen Auffassungen vom Regelfolgen

Die Regelfolge-Überlegungen beginnen mit dem Beispiel des widerspenstigen Schülers. Nachdem der Schüler sein Verständnis der Regel „$+n$" an Bespielen im Zahlenraum bis 1000 demonstriert hat, indem er auf den entsprechenden Befehl, Reihen der Form $0, n, 2n, 3n, \ldots$ hingeschrieben hat, setzt er die Reihe „+2" über 1000 hinaus auf einmal so fortsetzt: $1000, 1004, 1008, 1012$. Jegliche Versuche, ihm seinen Fehler einsichtig zu machen, scheitern:

> Wir sagen ihm: »Schau, was du machst!« - Er versteht uns nicht. Wir sagen: »Du solltest doch *zwei* addieren; schau, wie du die Reihe begonnen hast!« - Er antwortet: »Ja! Ist es denn nicht richtig? Ich dachte, so *soll* ich's machen.« - Oder nimm an, er sagte, auf die Reihe weisend: »Ich bin doch auf die gleiche Weise fortgefahren!« - Es würde uns nun nichts nützen, zu sagen »Aber siehst du denn nicht....?« - und ihm die alten Erklärungen und Beispiele zu wiederholen. (PU §185)

Der Schüler sieht nicht, dass er etwas anders macht als zuvor und keine unserer Erklärungen, Anweisungen und Beispiele, die zuvor genügt hatten, um ihn die Reihe bis 1000 korrekt fortsetzen zu lassen, scheinen nun seine Überzeugung erschüttern zu können, dass seine Fortsetzung 1000, 1004, 1008 . . . die richtige ist. Im Gegenteil, er verhält sich *auf unsere Erklärungen und Anweisungen hin* so. Es scheint für ihn ebenso selbstverständlich zu sein, dass die Reihe nun mit 1000, 1004, 1008 . . . fortzuführen ist, wie es für uns selbstverständlich ist, dass die korrekte Fortsetzung 1000, 1002, 1004 . . . ist.

> – Wir könnten in so einem Falle etwa sagen: Dieser Mensch versteht von Natur aus jenen Befehl, auf unsre Erklärungen hin, so, wie *wir* den Befehl: »Addiere bis 1000 immer 2, bis 2000 4, bis 3000 6, etc.«. Dieser Fall hätte Ähnlichkeit mit dem, als reagierte ein Mensch auf eine zeigende Gebärde der Hand von Natur damit, daß er in der Richtung von der Fingerspitze zur Handwurzel blickt, statt in der Richtung zur Fingerspitze. (PU §185)

Wenn unsere Erklärungen und Anweisungen dieses bizarre Verhalten des Schülers nicht auszuschließen vermögen, können wir, so scheint es zumindest auf den ersten Blick, nie ganz sicher sein, dass jemand eine Regel verstanden hat, selbst wenn sein Verhalten bisher kein Anlass gegeben hat, daran zu zweifeln. Und wenn dem so wäre, woher wüssten *wir* dann, wie die Reihe der Regel gemäß fortzusetzen ist?

Zu Beginn der RfÜ wird also die Frage aufgeworfen, wodurch die Normativität der Regel überhaupt konstituiert wird: „Wie wird denn entschieden, welches an einem bestimmten Punkt der richtige Schritt ist?“ (PU §186)

In der Tat vermag der Verweis auf den Regelausdruck (z.B.: „Du sollst doch immer 2 addieren!“), dem Schüler nicht zu vermitteln, was zu tun ist. Dies liegt nicht an der Unklarheit der Formulierung, so dass eine genauere Formulierung hier helfen würde – Wittgenstein wählt bewusst ein völlig simples Beispiel. Es genügt zur Erklärung nicht, den Regelausdruck zu deuten, d.h. „einen Ausdruck der Regel durch einen anderen zu ersetzen“, denn der Schüler kann *diesen* Ausdruck ebenso anders verstehen (PU §201). Die Frage nach der richtigen Deutung, dem richtigen Ausdruck der Regel, liefert keine Antwort darauf, was an einer konkreten Stelle zu tun ist, sondern führt in einen infiniten Regress.[18] „Jede Deutung [im oben genannten Sinne]“, so schließt Wittgenstein „hängt, mitsamt dem Gedeuteten, in der Luft; sie kann ihm nicht als Stütze dienen. Die Deutungen allein bestimmen die Bedeutung [des Regelausdrucks] nicht.“ (PU §198)

Dummetts Interpretationsthese (1) trifft damit zu.

Ferner argumentiert Wittgenstein, im Austausch mit seinem imaginären Gesprächspartner, auch gegen eine falsche Vorstellung davon, was es heißt zu sagen, die richtige Fortsetzung der Reihe sei diejenige, die mit der Regel, wie sie *gemeint* war (wie sie uns „vorschwebte“ oder wie wir sie „im Kopf hatten“) übereinstimmt. Wenn der Gesprächspartner sagt, dass die Reihenfortsetzung des Schülers nicht damit übereinstimme, wie er (als Lehrer) den Befehl „+2“ gemeint habe, kann das, so Wittgenstein, nicht bedeuten, dass er beim Äußern des Befehls gedacht habe, der Schüler solle nach 1000 1002, nach 1866 1868, nach 100054 100056 usw. schreiben. Es wäre absurd zu denken, dass uns beim Äußern der Regel, ihre unbegrenzt vielen (!) Anwendungen gegenwärtig wären, dass das „Meinen des Befehls (...) auf seine Weise alle jene Übergänge doch schon gemacht“ habe (PU §§186-188); dass wir etwas „im Kopf [haben], was alle diese Bestimmungen schon enthält“ (BGM VII §24). „Die Regel war *so* gemeint“ heißt vielmehr einfach „»Hätte man mich damals gefragt, welche Zahl er nach 1000 schreiben soll, so hätte ich geantwortet ›1002‹.«“ (PU §187). Und dies ist eine empirische Prognose, keine Deutung des Regelausdrucks. Es ist, so Wittgenstein, irrig zu glauben, die „Seele fliege beim Meinen, gleichsam, voraus und mache alle Übergänge, ehe [man] körperlich bei dem oder jenem angelangt“ ist (PU §188).

Folglich wird auch Dummetts zweite Interpretationsthese (2) durch den Text durchaus gestützt.

Die beiden vom Gesprächspartner vorgeschlagenen und sicherlich auch erstmal nahe liegenden Wege zu erklären, wodurch die Normati-

[18] Vgl. dazu auch BGM I §113: „Wie viele Regeln immer du mir angibst – ich gebe Dir eine Regel, die *meine* Verwendung deiner Regel rechtfertigt.“

vität der Regel konstituiert wird, scheitern. Sie stehen damit natürlich insbesondere auch nicht als Erklärung auf die Frage zur Verfügung, wodurch die Normativität *logischer und mathematischer Schlussregeln* konstituiert wird. Dummett hebt daher völlig zu Recht hervor, dass die Ergebnisse (1) und (2) auch für die Philosophie der Mathematik relevant sind.

6.3.3 Regelskeptizismus?

Wie oben dargestellt, kommt der vollblütige Konventionalismus nun dadurch ins Spiel, dass Dummett Wittgenstein so interpretiert, dass dieser aus den dargestellten Befunden „skeptische" Konsequenzen zieht: Es gibt eine *Kluft* zwischen der Regel und ihren Anwendungen. Und um diese Kluft zu *überbrücken*, müssen wir in jedem neuen Anwendungsfall *entscheiden*, worin hier das korrekte Folgen der Regel besteht. Jede Anwendung einer Regel in einem neuen konkreten Fall und folglich auch jeder Beweis, der aus einer Reihe solcher Anwendungen besteht, ist, laut Dummett, eine neue solche Entscheidung: „(A)t each step we are free to choose to accept or reject the proof" (Ibid., S.330) Die Akzeptanz eines Beweises und jedes seiner Zwischenschritte drückt die Annahme einer neuen Konvention aus – „If we[19] accept the proof, we confer necessity on the theorem proved; we 'put it in the archives' and will count nothing as telling against it. In doing this we are making a new decision." (Ibid., S. 330) – und unsere Entscheidung, diese linguistische Konvention anzunehmen, ist unabhängig von bereits getroffenen Entscheidungen. Mit diesem Befund stimmt auch Frascolla überein: „[I]t is a *logically free decision* that establishes the meaning of "following from the [rule]" in each case" (Frascolla 1994, S.120, meine Hvbg.).

Hier beginnt die Position, die Wittgenstein gemäß Dummett vertritt, problematisch zu werden. Gleichzeitig wird aber auch Dummetts Interpretation selbst an dieser Stelle problematisch.

Zunächst einmal ist der skeptische Schluss von (1) und (2) auf (3) ein *Non-sequitur*: Dass Regelausdrücke – sei es auf dem Papier oder

[19] Wer „wir" sind, wird von Dummett nicht weiter thematisiert. Bei Frascolla übernimmt die „community" diese Rolle.

in unserem Kopf – *allein* nicht festlegen, worin das korrekte Befolgen der ausgedrückten Regel an einer konkreten Stelle besteht, schließt *logisch* nicht schon aus, dass dies überhaupt festgelegt ist. Ohne weiteres Argument legen (1) und (2) Wittgenstein also schon mal nicht auf skeptische Konsequenzen fest. Und Dummett selbst liefert keinen zusätzlichen Grund dafür, alternative Erklärungen auszuschließen.

Ferner ist die skeptische Interpretation auch nicht kompatibel mit dem Text der RfÜ, wie verschiedene Interpreten, wie beispielsweise Baker & Hacker (2009), Glock (1996, 2015a), Goldfarb (2012) oder Schroeder (2006), meiner Meinung nach überzeugend dargelegt haben. Die aus meiner Sicht entscheidenden Punkte, werde ich im Folgenden kurz darstellen.

Eine Schlüsselstelle im Zusammenhang mit der skeptischen Deutung der RfÜ ist die Interpretation der bereits erwähnten Bemerkung PU §201. Gemäß Kripke[20] werden hier die vorangegangenen Bemerkungen ausgewertet und die „skeptische“ Konsequenz gezogen. Er schreibt:

> Each new application we make is a leap in the dark: any present intention could be interpreted so as to accord with anything we might choose to do. So there can be neither accord, nor conflict. This is what Wittgenstein said in §201. (Kripke 1982, S.55)

Gegen diese vielzitierte Interpretationsthese gibt es einen ebenso wohlbekannten Einwand:[21] Kripke hat §201 falsch gelesen. *Tatsächlich* sagt Wittgenstein dort nämlich Folgendes:

> Unser Paradox war dies: eine Regel könnte keine Handlungsweise bestimmen, da jede Handlungsweise mit der Regel in Übereinstimmung zu bringen sei. Die Antwort war: Ist jede mit der Regel in Übereinstimmung zu bringen, dann auch zum Widerspruch. Daher *gäbe* es hier weder Übereinstimmung noch Widerspruch. (PU §201, meine Hvbg.)

[20]Bei Dummett selbst fehlt, wie bereits erwähnt, eine Begründung für seinen Skeptizismus.

[21]Vgl. z.B. Glock 1996, Kapitel „rule-following“.

Und weiter heißt es:

> Daß da ein *Mißverständnis* ist, zeigt sich schon darin, daß wir in diesem Gedankengang Deutung hinter Deutung setzen; als beruhige uns eine jede wenigstens für einen Augenblick, bis wir an eine Deutung denken, die wieder hinter dieser liegt. Dadurch zeigen wir nämlich, daß es eine Auffassung einer Regel gibt, die *nicht* eine *Deutung* ist; sondern sich, von Fall zu Fall der Anwendung, in dem äußert, was wir »der Regel folgen«, und was wir »ihr entgegenhandeln« *nennen.* Darum besteht eine Neigung, zu sagen: jedes Handeln nach der Regel sei ein Deuten. »Deuten« aber sollte man nur nennen: einen Ausdruck der Regel durch einen anderen ersetzen. (PU §201, erste und letzte Hvbgn. sind meine)

Kripke ignoriert in seiner Interpretation also den entscheidenden *Konjunktiv* („gäbe"), der deutlich macht, dass es sich hier in Wirklichkeit um ein Reductio-Argument handelt.

Wenn wir annehmen, die korrekte Verwendung an einer bestimmten Stelle sei *allein* durch unsere Intentionen oder den korrekten Ausdruck der Regel bestimmt, die Frage nach der korrekten Verwendung sei also durch Deutung des Ausdrucks bzw. unserer Intention zu klären, *dann* befinden wir uns in der von Kripke beschriebenen Lage. Und wenn es weder Übereinstimmung noch Widerspruch gibt, dann gibt es auch keine Regeln (vgl. Fußnote 11). *Diese Annahme* impliziert also tatsächlich einen Regelskeptizismus bzw. -nihilismus.

Wittgenstein hält die Position des Skeptikers aber für absurd. Denn offensichtlich gibt es in der Praxis keinerlei Probleme mit dem Regelfolgen, wie Wittgenstein zu Recht an zahlreichen Stellen festhält:

> »Aber dieser Reihenanfang konnte offenbar verschieden gedeutet werden (z.B. durch algebraische Ausdrücke) und du mußtest also erst eine solche Deutung wählen.« – Durchaus nicht! Es war, unter Umständen, ein Zweifel möglich. Aber das sagt nicht, daß ich gezweifelt habe, oder auch nur zweifeln konnte. (PU § 213; vgl. auch den

anschließenden §212)

> „Es bricht kein Streit darüber aus (etwa zwischen Mathematikern), ob der Regel gemäß vorgegangen wurde, oder nicht.“ (PU §240)

und ferner

> In ordinary life one is never troubled by a gap between the sign [dem Regelausdruck] and its application.“(AWL, S.90)

Und folglich müssen unsere *Annahmen falsch* sein. Es muss *eine andere Auffassung* von Regeln geben, die nicht von dieser Annahme ausgeht.

Kripkes Interpretation versucht diesem offensichtlichen Widerspruch zwischen der skeptischen Einsicht und der funktionierenden Praxis dadurch zu begegnen, dass sie behauptet, Wittgenstein entwickele eine sogenannte „skeptische Lösung“. Diese Lösung gibt dem Skeptiker zwar Recht, versucht aber zu erklären, warum es den Anschein hat, als könnten wir Regeln folgen (Kripke 1982, S.66). Danach ist es für das Regelfolgen wesentlich, dass es sich in einer Gemeinschaft („community“) abspielt. Die Mitglieder dieser Gemeinschaft korrigieren Verhalten, wie das des Schülers, der nicht mit „1002“ fortfährt, „wie alle anderen“, sondern mit „1004“, und stimmen darin überein, welche Verhaltensweisen sie korrigieren und welche nicht. Damit, so glaubt Kripke, lässt sich eine neue Unterscheidung zwischen korrekten und nicht-korrekten Verwendungen der Regel einführen, die der skeptischen Einsicht Rechnung trägt:

> What follows from these observations [...] is not that the answer everyone gives to an addition problem is, by definition, the correct one, but rather the platitude that, if everyone agrees upon a certain answer, then no one will feel justified in calling the answer wrong. (Kripke 1982, S.112)

Die Übereinstimmung der Community konstituiert nicht die Korrektheit der einzelnen Regelverwendungen (das wird durch die RfÜ ausgeschlossen), aber die Bedingungen, unter denen wir gerechtfertigter Weise behaupten können („assertibility conditions"), dass *dies* die korrekte Verwendung der Regel ist.

Tatsächlich ist dies jedoch keine Lösung. Einerseits stünde auch diese Auffassung im Widerspruch zur Praxis, in der das Verhalten im Rekurs auf die Regel selbst begründet wird und nicht im Rekurs darauf, was die meisten tun. Und andererseits hat der Abweichler, wenn er schon die simple Regel „+2" nicht versteht, auch keine Chance, das Verhalten der Gemeinschaft als Zustimmung oder Ablehnung zu verstehen. (Vgl. auch Glock 1996, S.237)

Auf Grundlage der Regelfolge-Überlegungen der *PU* lässt sich also nicht behaupten, Wittgenstein selbst vertrete einen Regelskeptizismus.

6.3.4 Die Beziehung zwischen einer Regel und ihrer korrekten Verwendung ist intern

Die andere Auffassung einer Regel, von der in §201 die Rede ist, „äußert", bzw. zeigt sich in dem, „was wir »der Regel folgen«, und was wir »ihr entgegenhandeln« *nennen*." Damit verweist Wittgenstein auf den definitorischen Aspekt von Regeln (s. 6.2). Die Verbindung zwischen der Regel und ihren korrekten Verwendungen ist *intern*, d.h. konstitutiv für ihre Relata (Glock 1996, S.327; Baker & Hacker 2009, S.129). Der Regel „+2" zu folgen, *heißt*, nach 1000 1002 zu schreiben und anders fortzufahren heißt, dieser Regel *nicht* gefolgt zu sein: „das Resultat selbst [ist] auch ein Kriterium des Rechnens" und daher ist „undenkbar, der Regel richtig zu folgen und verschiedene [Resultate] zu erzeugen" (BGM VII §27, vgl. auch VII §3, 6 und 8)

„Wenn ich die Regel so auffasse, wie ich sie aufgefaßt habe, so entspricht ihr nur *diese* Handlung" (BGM VI §30) Denn wir ziehen das „So-Auffassen" der Regel und das „So-Fortsetzen in Eins zusammen" (BGM VI §29). Deshalb gibt es von vornherein keine Lücke, die überbrückt werden müsste.

Dadurch, dass die Verbindung zwischen der Regel und ihrer korrekten Verwendung intern ist, ist sie ja gerade dem Zweifel entzogen und besteht in diesem Sinne notwendig (BGM VII §6).

Im zweiten Absatz von §201 argumentiert Wittgenstein weiter, dass die Annahme, das Regelfolgen bestehe im richtigen Deuten der Regel, von vorn herein fehlgeleitet war. Denn Deuten heißt nur „einen Ausdruck der Regel durch einen anderen ersetzen“. So lange wir deuten, fangen wir daher noch nicht mal an, der Regel zu folgen. Und das heißt auf der anderen Seite, um überhaupt denken zu können, dass der Regelausdruck ‚$a_n = 2n$‘ für ein bestimmtes Verständnis ‚1002‘ als Nachfolger von ‚1000‘ ergibt – und das können wir offensichtlich[22] –, muss der drohende Regress schon unterbrochen sein.[23] In diesem Fall kann unser Verständnis der Regel nicht durch eine Interpretation – d.h. durch eine Ersetzung des Regelausdrucks durch einen anderen – vermittelt sein. Und die Frage, wie wir das Eintreten in die Handlung bewerkstelligen, beantwortet Wittgenstein so: „[I]ch bin zu einem bestimmten Reagieren auf dieses Zeichen abgerichtet worden, und so reagiere ich nun.“ (PU §198) Regelfolgen ist eine praktische Fähigkeit, ein *Know-how.* Eine Regel zu beherrschen heißt eine „Technik“ zu beherrschen (PU §198, §205, § 205, §232; BGM VII §57). Und diese Fähigkeit zeigt sich, „äußert“ sich in entsprechenden Handlungen.

Eine weitere wesentliche Einsicht der RfÜ ist also, dass sich das zum Beherrschen einer Regel nötige Know-how nicht beliebig weit theoretisch, über ein Wissen-dass, vermitteln lässt – etwa über Erläuterungen und Deutungen eines Regelausdrucks. Wie Wittgenstein später in *Über Gewißheit* in Bezug auf theoretisches Wissen im Allgemeinen festhalten wird: „[D]as Ende der Begründungen ist nicht die unbegründete Voraussetzung, sondern die unbegründete Handlungsweise.“ (ÜG §110) Vielmehr setzt auch explizites Regelfolgen ein gewisses Know-how voraus, das nicht mehr weiter gerechtfertigt werden kann oder muss (vgl. Schroeder 2006, S.193).

Man muss Dummett zu Gute halten, dass Wittgenstein in den *BGM* tatsächlich an mehreren Stellen, und insbesondere in Bezug auf logische und mathematische Regeln, davon spricht, dass uns eine Regel nicht

[22]Oder, falls das nicht der Fall ist, genügt der Hinweis „Du sollst die Reihe der geraden Zahlen schreiben“ oder spätestens die Exemplifikation „Na, 2, 4, 6, 8, 10, 12... usw.“

[23] Dies ist ein abgewandeltes Beispiel von Schroeder (2006, S.193).

zu einem bestimmten Verhalten „zwingt“ (BGM I §51, §§113-118, VI §30, VII §66). Ferner spricht Wittgenstein dort auch sowohl im Zusammenhang mit mathematischen Regeln (BGM VI §24) als auch im Zusammenhang mit Beweisen (BGM III §27) von „Entscheidungen“.

Dass er dies jedoch einerseits auf andere Weise tut, als Dummett ihm unterstellt[24] und diese Bemerkungen andererseits, wenn man sie richtig interpretiert, völlig im Einklang mit den Ergebnissen der RfÜ sind, werde ich in den folgenden beiden Abschnitten zeigen.

6.3.5 Inwiefern Regeln uns nicht zwingen

Es ist auffallend, dass Wittgensteins Beschäftigung mit der Frage, ob und inwiefern uns die Regel zu einer bestimmte Verwendung zwinge, gerade im Zusammenhang mit logischen und mathematischen Regeln auftaucht. An einer Stelle scheint Wittgenstein Dummetts Interpretation tatsächlich gefährlich nahe zu kommen, zumindest auf den ersten Blick. In BGM I §113 erwidert Wittgenstein auf den Einwurf seine Gesprächspartners, ob wir denn in einer Schlusskette nicht gezwungen seien zu gehen, wie wir gehen: „Gezwungen? Ich kann doch wohl gehen, wie ich will!“ Im weiteren Verlauf gewinnt diese Aussage sogar scheinbar noch an Dramatik: Aber zumindest wenn wir *im Einklang* mit der Regel bleiben wollen, haben wir doch wohl keine Wahl – „Durchaus nicht; ich nenne *das* ›Einklang‹“. Aber wir können doch nicht einfach die Bedeutung des Wortes „Einklang“ verändern – „wer sagt, was hier ›verändern‹ und ›gleichbleiben‹ heißt?“ Und kulminiert schließlich in der bereits in Fußnote 18 zitierten Aussage: „Wie viele Regeln immer du mir angibst – ich gebe Dir eine Regel, die *meine* Verwendung deiner Regel rechtfertigt.“

Dies ist jedoch nichts anderes als das schon bekannte Paradox aus den Regelfolge-Überlegungen, auf das Wittgenstein *dort* eine Antwort gegeben hat. Und die gleiche Antwort gibt er auch hier. Den Einwand

[24] Diese Fehlinterpretation ist übrigens weniger verwunderlich, wenn man liest, wie Dummett die Entstehungsgeschichte seines Kommentars viele Jahre später in einem Interview mit Schulte schildert: „I couldn’t get a grip on Wittgenstein’s thought to determine just what he was saying . [...] So I put the book [i.e. *BGM*] away and deliberately thought no more about the review for about three months. Then with my now impaired memory I wrote the review.“ (Dummett 1996, S.173)

des Gesprächspartners: „»Nach Dir könnte also jeder die Reihe fortsetzen, wie er will; und also auch auf *irgend* eine Weise schließen.«", erwidert Wittgenstein mit einem Verweis auf den definitorischen Aspekt von Regeln:

> Wir werden es dann wohl nicht »die Reihe fortsetzen« nennen und wohl auch nicht »schließen« (...)
>
> Und wenn du sagst, er könne es zwar reden, aber nicht *denken*, so sage ich nur, das heiße nicht: er könne es, quasi trotz aller Anstrengung, nicht denken, sondern es heißt: zum ›Denken‹ gehört für uns wesentlich, daß er – beim Reden, Schreiben, etc. – *solche* Übergänge macht. (BGM I §116)

Natürlich kann die Regel keinen physischen Zwang auf uns ausüben, etwas bestimmtes zu tun; insofern können wir handeln, wie es uns beliebt. (Schluss-)Regeln zwingen uns nicht „wie Gleise den Zug zwingen, das und das zu reden oder zu schreiben" (BGM I §116). Nichts zwingt uns, zu zählen oder zu schließen. Aber wenn wir den Dollarscheinen die Zahlen „1, 2, 3, 7, 18" zuordnen oder von „Der Pass liegt auf dem Schreibtisch oder im Safe." auf „Also muss er in der Vorratskammer sein." übergehen, dann zählen bzw. schließen wir auch nicht. Denn zählen heißt (u.a.), 4 auf 3 und 5 auf 4 folgen zu lassen und schließen heißt (u.a.) zu verstehen, dass $A \vee B$ den Fall $\neg A \wedge \neg B$ ausschließt: „Man nennt es dann »Schluß«, wenn der gefolgerte Satz sich tatsächlich aus den Prämissen ableiten *läßt*." (BGM I §6). Die Verbindung zwischen der Regel und ihren Anwendungen ist *intern*. Und deshalb können wir zwar *tun* was wir wollen, aber nicht *der Regeln folgen wie* wir wollen.

Ferner hätte dieses abweichende Verhalten entsprechende praktische Konsequenzen: „Wer anders schließt, kommt allerdings in Konflikt: z.B. mit der Gesellschaft; aber auch mit anderen praktischen Folgen." (BGM I §116) – in unserem Fall wird die entsprechende Person z.B. wahrscheinlich erst von ihrem Job als Kassiererin entlassen und verpasst anschließend ihren Flug nach Hawaii.

Dass die Regel uns im genannte Sinne „nicht zwingt", bedeutet, kontra Dummett, also keinesfalls, dass wir *ebenso gut* („without doing any more violence to our concepts“) das eine, wie das andere tun könnten und ist ferner auch keine Konsequenz aus (1) und (2). Es ist schlicht eine Bemerkung zur Grammatik. So wie wir den Begriff „einer Regel folgen“ üblicherweise verwenden, bezeichnen wir damit keinen kausal determinierten Prozess, sondern ein Handeln nach Gründen (vgl. 6.2: (Normativität), (Intentionalität)).

Und hierin scheint schon Dummetts erstes Missverständnis zu liegen. Dieser fragt sich nämlich:

> A machine can follow this rule [Nachfolgerbildung]; whence does a human being gain freedom of choice in this matter which the machine does not possess? (Dummett 1959, S.331)

Folgt man Wittgensteins grammatischen Anmerkungen zum Regelbegriff, so ist Dummetts Behauptung unsinnig und seine Frage trivial.

1. Wenn eine Maschine auf den Input „2+1“ den Output „3“ generiert, folgt sie dabei *in Wittgensteins Sinne* sicherlich *keiner* Regel. Dass jemand in seinem Tun einer Regel folgt, heißt, dass er auf Grund der Regel so handelt, wie er handelt. Daher ist es schlicht unsinnig davon zu sprechen, dass die Maschine „einer Regel folgt“. Die Maschine funktioniert allenfalls *in Übereinstimmung* mit der Regel. Und dieses Verhalten der Maschine, lässt sich dann nur im Rekurs auf Ursachen erklären, nicht auf Gründe (vgl. Intentionalität).

2. Selbstverständlich hat eine Maschine in diesem Sinne auch keine „Wahl“, was sie mit dem Input „2+1“ macht. Das Verhalten der Maschine wird durch ihre Hard- und Software (sowie die physikalische Beschaffenheit ihrer Umgebung) kausal verursacht. Wir hingegen handeln in Übereinstimmung mit unseren Absichten und Gründen (unabhängig davon, ob letztere kausal determiniert sein mögen). Wir können unser Handeln begründen oder korrigieren und müssen es deshalb auch verantworten. In diesem Sinne haben Menschen hier eine Wahl, die eine Maschine *nicht* hat.

Dummetts Frage ist Ausdruck genau so einer Art von philosophischen Verwirrung, die sich durch eine Klarlegung der Grammatik der beteiligten Begriffe auflösen lässt.

Wenn es uns gerade bei aussagenlogischen Schlüssen oder beim Zählen dennoch so vorkommt als bliebe uns gar nichts anderes übrig als *so* zu schließen, oder als könne der Nachfolger von 4 *kein anderer* als 5 sein – als könnten wir es uns anders gar nicht denken – dann liegt das an der zentralen Rolle, die diese Tätigkeiten in unserer Lebenswelt spielen:

> Zählen [...] ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir alle »eins« »zwei«, auf »zwei« »drei« sagen, usf. (BGM I §4)

Wir zählen Tore beim Fußballspielen, Hände beim Abstimmen oder die aufgeschlagenen Eier beim Zubereiten des Kuchenteiges. Dass das funktioniert, setzt voraus, dass wir uns blind darauf verlassen können, dass alle auf dieselbe Weise zählen – der Schiedsrichter sowie die Spieler beider Mannschaften, der Backbuchautor sowie der Bäcker etc. – und entsprechend wird im Unterricht darauf gedrungen. Auf Grund dieses Trainings und dieser Rolle ist es für uns völlig *selbstverständlich*, dass 1003 der Nachfolger von 1002 ist. Und *deswegen* kann es uns so erscheinen, „als hätte die Regel alle ihre Folgesätze im voraus erzeugt." (PU §238)

Wenn wir andere Fälle von Regelfolgen betrachten, tritt uns das Verhältnis von persönlicher Handlungsfreiheit und Verbindlichkeit von Regeln viel deutlicher vor Augen (vgl. BGM VII §66). Brettspiele beispielsweise spielen wir normalerweise zum Vergnügen. Hier ist klar, dass wir durch die Schachregeln nicht gezwungen sind z.B. die Figur auf dem Brett, die im Schachspiel Läufer genannt wird, diagonal zu ziehen. Man kann ihn auch vertikal ziehen oder in die Luft werfen. Diese Handlungen wären offensichtlich keine *Schach*züge und unser Spielgegner würde sich entsprechend zu Recht beschweren. Aber das macht es uns in keiner Weise unmöglich, so zu handeln.

Zählen und (logisch) schließen sind hingegen so tief verankert in so vielen unserer alltäglichen Tätigkeiten, dass einerseits die Konsequenzen eines Zuwiderhandelns viel gravierender wären und wir andererseits dadurch so routiniert darin sind, diesen Zähl- und Schlussregeln zu folgen, dass wir überhaupt nicht auf die Idee kämen, etwas anderes zu tun. Dementsprechend ist hier die Gefahr besonders groß, das eigentlich Selbstverständliche (dass wir frei sind zu tun, was wir wollen) nicht zu bemerken (vgl. PU §415) und daher auf philosophische Pseudoerklärungen auszuweichen. Aus *diesem* Grund taucht die Diskussion um den „Zwang“ von Regeln insbesondere im Zusammenhang mit logischen und mathematischen Regeln auf.

6.3.6 Eine Sache der Entscheidung?

In den Regelfolge-Überlegungen selbst taucht das Wort „Entscheidung“ überhaupt nur an einer einzigen Stelle auf, nämlich im §186.[25] Dort argumentiert Wittgenstein gegen die Auffassung, um einer Regel zu folgen, sei eine Intuition nötig. Und in diesem Zusammenhang heißt es:

> Richtiger, als zu sagen, es sei an jedem Punkt eine Intuition nötig, wäre *beinah*, zu sagen; es sei an jedem Punkt eine neue Entscheidung nötig. (PU §186, meine Hvbg.)

Dies klingt jedoch keinesfalls danach, als würde Wittgenstein tatsächlich behaupten, für jede konkrete Verwendung einer Regel sei eine Entscheidung nötig. Er sagt lediglich, es wäre *beinahe richtiger* von „Entscheidung“ zu sprechen, als zu sagen, es sei eine *Intuition* nötig.[26]

Im *Brown Book* erläutert er genauer, in welcher Hinsicht „Entscheidung“ seiner Auffassung nach einerseits zwar eine *treffendere* Beschreibung wäre, andererseits aber auch keine *treffende* ist:

> It is no act of insight, intuition, which makes us use the rule as we do at the particular point of the series. It would

[25] Vgl. auch Mühlhölzer 2010, S.54.
[26] Vgl. dazu auch Goldfarb 2012, S.74.

> be *less confusing* to call it an act of decision, *though this too is misleading*, for nothing like an act of decision must take place, but possibly just an act of writing or speaking. And the mistake which we make here and in a thousand similar cases are inclined to make is labeled by the word "to make" as we have used it in the sentence "It is no act of insight which makes us use the rule as we do", because there is an idea that 'something must make us' do what we do. And this again joins on to the confusion between cause and reason. *We need have no reason to follow the rule as we do.* The chain of reasons has an end. (BrB II 4., S. 143, die ersten beiden Hvbg. sind meine.)

Einerseits, so argumentiert Wittgenstein hier, ist „Entscheidung" also insofern *treffender* als „Intuition" als „Entscheidung" unserer Rolle als Handelnde besser gerecht wird. Es muss nicht erst etwas bewirken, dass wir der Regel so folgen, wie wir ihr folgen („make us do what we do"). Ebenso wenig wie uns ein kausaler Mechanismus dazu bringt, der Regel zu folgen, wie wir ihr folgen, brauchen wir dazu eine Intuition, eine innere Eingebung (vgl. dazu auch PU § 232). Und andererseits, so argumentiert Wittgenstein weiter, ist „Entscheidung" insofern *irreführend* als beim Regelfolgen tatsächlich kein Akt der Entscheidung stattfinden muss. Dies ist ein zentrales, sich wiederholendes Thema in den RfÜ und an anderen Stellen: Wenn wir in die Praxis schauen, werden wir feststellen, dass uns die Gründe dafür, *diese* Handlung für die der Regel gemäße zu halten – also weitere Erläuterungen und Ausdeutungen des Regelausdrucks – irgendwann, oder sogar „bald" (PU §211) ausgehen werden. Das heißt aber nicht, dass wir deshalb zweifeln, worin die korrekte Verwendung der Regel besteht: „Wenn jemand, den ich fürchte, mir den Befehl gibt, die Reihe fortzusetzen, so werde ich schleunig, mit völliger Sicherheit, handeln, und das Fehlen der Gründe stört mich nicht." (PU §212) Dass wir die Frage nach dem warum nicht (weiter) beantworten können, heißt nicht, dass wir nicht wissen, was richtig und was falsch ist – wie bereits in 6.2 bemerkt, können wir Regeln in vielen Fällen schließlich sogar folgen, ohne überhaupt irgendeinen Regelausdruck angeben zu können.[27] *Rechtfertigungslos* zu handeln, so betont Wittgenstein, heißt nicht *zu Unrecht* zu handeln (vgl. PU §289; BGM VII §40).

In den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* wirft Wittgenstein zwar tatsächlich die Frage auf: „Warum soll ich nicht sagen: ich habe mich im Beweis zu einer *Entscheidung* durchgerungen?" (BGM III §27) Aber er qualifiziert sogleich, dass dies keinesfalls eine *unabhängige* Entscheidung wäre: „Der Beweis stellt diese Entscheidung in ein *System von Entscheidungen.*" (Ibid., meine Hvbg.). Eine solche „Entscheidung" wäre damit also nicht willkürlich, wie Dummett in seiner Interpretation behauptet. Sie wird im Einklang mit den bereits etablierten Regeln (denjenigen, für deren Annahme wir uns schon „entschieden" haben) getroffen. Zudem betont Wittgenstein, wie Dummett selbst festhält, an zahlreichen Stellen in den *BGM* ausdrücklich, dass ein Beweis uns *überzeugt* oder *überredet*, den bewiesenen Satz als mathematische Regel anzunehmen.

Ferner benutzt Wittgenstein das Wort „Entscheidung" auch in der zitierten Stelle BGM III §27, um sich von einer Auffassung abzugrenzen, die seiner Meinung nach fehlgeleitet ist, nämlich in diesem Fall von der Auffassung, der bewiesene Satz deute „auf eine Realität außerhalb seiner selbst" (Ibid.). Mathematische Sätze sind gemäß Wittgenstein keine Beschreibungen irgendeiner externen Realität, sondern sie haben die Funktion von sprachlichen Regeln. Dementsprechend führt uns der Beweis auch nicht zu einer „Erkenntnis" bezüglich einer solchen Realität, sondern wir überzeugen uns im Beweis davon, dass es gute Gründe gibt, die fragliche Wort-Symbol Kette als Regel anzuerkennen. In dieser Hinsicht haben wir es eher mit einer begründeten „Entscheidung" als mit einer „Erkenntnis" zu tun.

Andererseits muss man Dummett zugestehen, dass Wittgenstein in den *BGM* im Zusammenhang mit Regelfolgen durchaus auch von *spontanen*, also nicht abgewogenen Entscheidungen spricht. So bezeichnet er es in BGM VI §24 als „spontane Entscheidung", wie eine Zahlenreihe an einer konkreten Stelle fortgesetzt wird. Aber das, so erläutert er

[27] Zur Frage, inwiefern dies auch für Regeln der höheren Mathematik gilt, werden wir in Abschnitt 6.4 kommen.

gleich anschließend, heißt nur: „so handle ich; frage nach keinem Grunde!“ Wir sind hier wieder in dem Fall, in dem wir zwar keinen (bzw. keinen weiteren) Grund angeben können, es uns aber völlig selbstverständlich ist, was die Regel verlangt. Es handelt sich ja (nota bene!), um das Fortsetzen von Zahlenreihen:

> Ich weiß, was ich in jedem besonderen Fall zu tun habe. Ich weiß, d. h. ich zweifele nicht: es ist mir offenbar. Ich sage: »Selbstverständlich«. Ich kann keinen Grund angeben. (BGM VI §24)

Dies ist der Fall, über den Wittgenstein im *Brown Book* gesagt hatte, es könne irreführend („misleading“) sein, ihn als „Entscheidung“ zu bezeichnen.

Auch in den *BGM* und dort in Bezug auf Beweise und elementare mathematische Regeln (Zahlenreihen bilden) verwendet Wittgenstein das Wort „Entscheidung“ und den Ausdruck „spontane Entscheidung“ also nur mit äußerster Vorsicht und entsprechenden Qualifikationen, um andere drohende Missverständnisse zu vermeiden.[28]

Ferner entscheiden wir, wie im letzten Abschnitt bereits hervorgehoben, vor allem nicht über die *Richtigkeit* von Regelverwendungen.

Wenn Dummett also zurecht festhält:

> We naturally think that, face to face with a proof, we have no alternative but to accept the proof *if* we are to remain faithful to the understanding we already had of the expressions contained in it. (S. 332, meine Hvbg.)

so steht dies, anders als Dummett behauptet, gar nicht im Widerspruch zu Wittgensteins Auffassung. Da die Verbindung zwischen Regel und Anwendung *intern* ist, gilt, gemäß Wittgenstein, für jeden Schritt im Beweis – ein jeder solcher Schritt besteht ja gerade in der Anwendung einer bereits etablierten Regel – : Nur wenn wir *so* schlie-

[28] Vgl. dazu auch Mühlhölzer 2010: „W. möchte mit [der Rede von von einer ‚Entscheidung‘] falschen Bildern vom ‚Geführtwerden durch die Regel‘ entgegenwirken“(S.54), sowie die von Mühlhölzer dort zitierte Nachlassstelle MS 123, S.20r.

ßen, folgen wir an *dieser* Stelle *dieser* Regel. Wir können uns zwar entscheiden, etwas anderes zu tun, aber dann folgen wir ihr auch nicht und können sie folglich auch nicht gerechtfertigter Weise zur Begründung unseres Handelns heranziehen. Und das heißt insbesondere, dass wir uns zwar entscheiden können, eine mathematische Wort-Symbol Kette als mathematischen Satz zu behandeln, obwohl sie bereits etablierten („archivierten") Regeln widerspricht, damit *ist* die mathematische Wort-Symbol Kette aber noch lange kein mathematischer Satz (jedenfalls nicht in unserer bestehenden Praxis) – „[D]aß alles (auch) als ein Folgen *gedeutet* werden kann, heißt doch nicht, daß alles ein Folgen ist." (BGM VII §47)

Damit muss Dummetts Interpretationsthese (4), nach der die Akzeptanz jedes neuen Beweises und damit die Wahrheit/Gültigkeit mathematischer Sätze auf einer willkürlichen Entscheidung beruht, entschieden zurück gewiesen werden.

6.4 Welche Rolle spielen Regelausdrücke?

Aus Wittgensteins Einsicht in den RfÜ, nach der Regelausdrücke *allein* nicht festlegen, worin die korrekte Verwendung einer Regel an einer bestimmten Stelle besteht (Dummetts zutreffende Interpretationsthese (1)), ist ferner häufig zu Unrecht geschlossen worden, dass Regelausdrücke beim Regelfolgen eigentlich keine Rolle spielen. So heißt es z.B. bei Mathieu Marion:[29] „[T]he symbolic expression of the rule no longer plays a role. It is no longer part of the criteria for following a rule, nor is it involved in the act." (1998, S.157) Dies erscheint aber vor allem in Bezug auf Regeln der höheren Mathematik hochgradig unplausibel, wie ich im Folgenden erläutern werde.

Zunächst ist festzuhalten, dass Wittgenstein sogar in den RfÜ der *Deutung* von Regelausdrücken durchaus eine Rolle zugesteht, nämlich dann, wenn sie *unbekannte* durch *vertraute* Regelausdrücke ersetzen (PU §190). Beispielsweise wird jemand, der mit der umgekehrten polnischen Notation nicht vertraut ist, der Frage, welchen Wert wir gemäß

[29]Er ist einer der Interpreten von Wittgensteins Philosophie der Mathematik, die sich dezidiert *gegen* Dummetts Interpretation aussprechen (Marion 1998, S.224-25).

der Regel $y = 3x + 17x - \div$ für y erhalten, wenn wir für x die Zahl 3 einsetzen, wahrscheinlich ratlos gegenüberstehen. Wenn wir ihm die Regel hingegen so hinschreiben, weiß er, was zu tun ist: $y = \frac{3+x}{17-x}$. Ferner wird uns die Regel oft auch überhaupt erst klar durch Angabe eines Regelausdrucks: Nehmen wir z.B. an, ein älterer Herr betritt zum ersten mal seit vielen Jahren wieder das DB-Reisezentrum am Bielefelder Hauptbahnhof, um sich eine Fahrkarte zu kaufen. Er bemerkt, dass die Leute nicht vor den Schaltern anstehen, sondern sich lose im Raum verteilen. Sobald ein Schalter frei wird, steht immer nur ein Mensch auf und begibt sich dort hin. Der ältere Herr erkennt, *dass* diese Menschen einer Regel folgen, aber es ist für ihn nicht ersichtlich, *welcher* Regel sie folgen. Als ihm jemand erklärt: „Sie müssen dort drüben eine Nummer ziehen und dann warten, bis Ihre Nummer da vorne auf dem Bildschirm erscheint.“, versteht er jedoch sofort, nach welcher Regel die Menschen vorgehen und was er folglich selbst zu tun hat.

Regelausdrücke und Deutungen von Regelausdrücken – durch die Angabe von weiteren Ausdrücken – spielen weder *immer* eine Rolle (sonst würden wir, wie in 6.3.3 dargestellt, nie in Handlungen eintreten), noch haben sie auf der anderen Seite gar keine Funktion. Sie haben dort ihren Platz, wo wir ohne (weitere) Erklärungen nicht sofort wissen, was zu tun ist. Und um dort ihren Zweck zu erfüllen, ist es nicht nötig, dass sie jedes mögliche Missverständnis ausschließen. Dass dies ohnehin prinzipiell nicht möglich ist, hatten die RfÜ gezeigt. Sondern sie müssen das tatsächlich bestehende Miss- oder Unverständnis beseitigen und uns so wieder an den „harten Felsen“ (PU §217) führen, jenem festen Grund, auf dem wir uns auskennen und wo wir an die vertraute Praxis anknüpfen und selbstständig weitermachen können. Welche Deutung oder Erklärung im gegebenen Fall zu diesem Zweck die „richtige“ ist, ist offensichtlich individuell verschieden und situationsabhängig.[30]

Wenn Wittgenstein betont, dass die Erklärungen bzw. Deutungen irgendwann zu einem Ende kommen müssen, meint er damit also nicht, dass Regelausdrücke und ihre Deutungen grundsätzlich keine Rolle

[30] Damit stimmt auch Goldfarb überein: „[E]xplanations are entered for particular purposes, against a background of practices.“ (2012, S.88)

spielen.

6.4.1 Regelausdrücke in der höheren Mathematik

Wittgenstein selbst leistet Interpretationen, wie der von Marion, dadurch Vorschub, dass er in *BGM* tatsächlich erwägt, man könne Mathematik, oder zumindest Arithmetik, auch ganz ohne Sätze betreiben (BGM I §144, Anhang III §4, BGM III §25).[31] Dies gehört meiner Auffassung nach zu Wittgensteins weniger glücklichen Überlegungen, vor allem, wenn man sie über die Arithmetik hinaus auf die ganze Mathematik ausweitet. Für die Regeln der höheren Mathematik erscheint es nämlich geradezu undenkbar, dass Regelausdrücke überflüssig sein sollten. Hier kommt den Regelausdrücken statt dessen sogar eine besonders wichtige Rolle zu. Betrachten wir zum Beispiel eine relativ einfache algebraische Gleichung als Ausdruck für die Regel R:

$$y = \frac{x^3(x^2-3)(x+7)}{(x^4+3)(x-7)(x+5)} \tag{R}$$

Dann dient hier, so scheint es, der Ausdruck der Regel R zu aller mindest als Stütze, die wir zur Hilfe konsultieren, wenn wir ermitteln welcher Wert sich gemäß der Regel im Fall $x = 3$ für y ergibt. Und auch wenn wir eine in einem mathematischen Satz im engeren ausgedrückte Regel im Beweis eines neuen Satzes verwenden, konsultieren wir diesen Satz, also den Ausdruck der entsprechenden Transformationsregel, um zu überprüfen, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind, und um das Resultat auf unseren konkreten Fall zu „übertragen“. Wenn wir erst ausreichend Erfahrung mit der Verwendung bestimmter mathematischer Regeln gemacht haben, mag diese Stütze manchmal nicht mehr nötig sein. Aber zunächst erscheint sie gerade zu unverzichtbar.

Marion sieht seine Interpretation durch folgende, häufig zitierte Passage aus PU §219 belegt: „Wenn ich der Regel folge, wähle ich nicht. Ich folge der Regel blind[32].“ Dies mag zwar zunächst nach einem Beleg

[31] Dies führt z.B. Frascolla u.a. zur Begründung für seine Interpretation an, nach der Regelausdrücke keine „intensionale“ Bedeutung haben. Diese Interpretation werde ich im Anschluss diskutieren.

[32] „Blind“ ist hier natürlich nicht pejorativ, im Sinne von „etwas nicht sehend/beachtend“ zu verstehen, sondern im Sinne von „etwas blind/mit großer Si-

klingen, tatsächlich ist hier jedoch Vorsicht geboten. Bei „der Regel" von der in PU §219 die Rede ist, handelt es sich um die Beispiel-Regel der RfÜ, also um die Fortsetzung der Reihe gerader Zahlen. Und diese gehört, wie bereits betont, zu denjenigen Regeln, die uns völlig selbstverständlich sind, so dass der Regelausdruck *hier* in der Tat keine Rolle spielt. Wenn Wittgenstein in Bezug auf solche Regeln sagt, wir folgten ihnen „blind", so ist das sicherlich eine treffende Beschreibung. Dies jedoch auf Regeln der Mathematik im Allgemeinen (oder gar Regeln im Allgemeinen) zu übertragen, wie Marion das Wittgenstein unproblematisierenderweise unterstellt, erscheint weder aus exegetischer noch aus mathematischer Sicht gerechtfertigt: Im oben betrachteten Beispiel wissen wir sicherlich nicht „blind", welcher Wert für y sich gemäß der Regel R für $x = 3$ ergibt, sondern wir müssen *auf den Regelausdruck blicken*, um die Frage zu beantworten.

Regeln der höheren Mathematik unterscheiden sich also von solchen Regeln, die uns, wie im Beispiel aus den RfÜ, völlig vertraut sind, in der Rolle, die ihre Regelausdrücke spielen. Einerseits lernen und verwenden wir die Regeln der höheren Mathematik, anders als die Regeln unserer Muttersprache oder elementare mathematische Fähigkeiten, wie das Bilden von Zahlenreihen, *explizit*, d.h. wir sind stets in der Lage die Regel, der wir folgen zu benennen (durch einen geschlossenen Regelausdruck). Dies wird, wenn wir solche Regeln verwenden, um neue Sätze zu beweisen, sogar verlangt! Andererseits ist der Regelausdruck beim Folgen der Regel insofern sogar direkt involviert als wir uns mit Blick auf den Regelausdruck, bzw. im Abgleich mit ihm klar machen, worin die korrekte Verwendung der Regel an der gegebenen Stelle besteht.

Ferner scheint hier der Lernprozess im Vergleich zu den Regeln der Muttersprache und vergleichbar elementaren Regeln gerade umgekehrt zu verlaufen: Erst lernen wir mathematischen Regeln explizit und sogar unter *Zuhilfenahme* der Ausdrücke zu folgen. Mit wachsender Erfahrung wird diese Stütze dann weniger wichtig.

In dieser Hinsicht stellen mathematische Regeln noch nicht mal einen besonderen Spezialfall dar. In einer ähnlichen Situation sind wir,

---

cherheit und Präzision können" – so wie etwa ein Klaviervirtuose mit verbundenen Augen spielen kann.

wenn wir als Erwachsene eine Fremdsprache[33] lernen und zunächst beim Bilden von Sätzen die Grammatik konsultieren, oder wenn wir beim Zusammenschrauben eines Regals die Einzelteile mit Blick auf die Abbildung in der Gebrauchsanweisung arrangieren.

Dass die Regelausdrücke, wenn wir Regeln der höheren Mathematik folgen, dabei auf die genannte Weise involviert sind, im Gegensatz zum Fall elementarer Regeln, wie derjenigen aus dem in den RfÜ gewählten Beispiel, stellt die in den RfÜ angestellten Überlegungen nicht in Frage. Nach wie vor gilt, auch für Regelausdrücke in der höheren Mathematik, dass der Regelausdruck *allein* nicht bestimmt wie der Regel an einer bestimmten Stelle zu folgen ist. *Dass* wir uns beim Befolgen von Regeln der höheren Mathematik in dieser Weise an den Regelausdrücken orientieren können, setzt eine regelgeleitete Praxis des Umgangs mit solchen Ausdrücken voraus. Wir müssen beispielsweise die Zeichenkette überhaupt erst einmal als Ausdruck einer mathematischen Regel begreifen. Diese Funktion geht allein aus den Strichen und Kringeln auf dem Papier nicht hervor. Wir müssen wissen welchen Bestandteilen des Regelausdrucks im Anwendungsfall was entspricht und was daraus folgt etc. In all diesen Schritten folgen wir Regeln, deren Verwendung sich nicht beliebig weit theoretisch beschreiben, sondern nur praktisch vermitteln lässt.

Ist Wittgenstein sich selbst darüber im klaren gewesen, dass sich die in den RfÜ angestellten Überlegungen nicht *direkt* auf alle Regeln übertragen lassen?

Dafür spricht, dass er in den RfÜ zunächst ein mal überhaupt ein Beispiel mit den passenden Eigenschaften wählt und dass er ferner die Rolle von *Deutungen* explizit an einem anderen Beispiel mit ebenfalls passenden Eigenschaften erörtert. Diese Bedachtheit in der Beispielwahl ist auch für *PU* im Allgemeinen sowie für die in den *BGM* veröffentlichten Bemerkungen charakteristisch.

Andererseits schenkt Wittgenstein der oben nahe gelegten Rolle von Regelausdrücken in der höheren Mathematik keine spezielle Beachtung und warnt insbesondere auch nicht davor, dass sich seine Bemerkun-

[33] In diesem Zusammenhang ist es interessant zu bemerken, dass in der Mathematik ja in erster Linie *neue* sprachliche Instrumente entwickelt werden.

gen zu elementaren Regel *nicht* ohne Weiteres verallgemeinern lassen. Dass er auch bei den oben erwähnten Bemerkungen, nach denen sich die Arithmetik möglicherweise ganz ohne Regelausdrücke betreiben ließe, die höhere Mathematik nicht explizit ausnimmt, spricht vielleicht sogar dagegen, dass er die Rolle von Regelausdrücken in der höheren Mathematik je angemessen erfasst hat.

6.4.2 Sind Regelausdrücke extensional definiert?

Bei Frascolla, für den die richtige Verwendung einer Regel in einem konkreten Fall eine Entscheidung ist, die keinerlei logischen Einschränkungen unterliegt („logically free decision" s.o.), sind Regelausdrücke infolgedessen extensional definiert: „[T]he verbal expression of a rule does not have any content which transcends *the class of actions* acknowledged as a temporally conforming to it, which transcends the ratified practice of following it." (1994, S.157) Diese Interpretation geht ursprünglich zurück auf Wright (1980, S.21).

Frascolla sieht sich in seiner Auffassung bestätigt durch Z §301, wo es heißt:

> Er muß *ohne Grund* so fortsetzen. Aber nicht, weil man ihm den Grund noch nicht begreiflich machen kann, sondern weil es – in *diesem* System – keinen Grund gibt. („Die Kette der Gründe hat ein Ende.") Und das *so* (in „so fortsetzen") ist durch eine Ziffer, einen Wert, bezeichnet. Denn auf *dieser* Stufe wird der Regelausdruck durch den Wert erklärt, nicht der Wert durch die Regel. (Z §301)

Hier verweist Wittgenstein aber nur auf den uns schon aus anderen Stellen vertrauten Punkt, dass wir nicht beliebig weit begründen können oder gar können müssen, *warum* die Regel an einer gegebenen Stelle *so* zu verwenden ist (vgl. z.B. PU §211). Wenn wir in unseren Begründungen zu einem Ende gelangen, dann können wir nur noch darauf verweisen, dass *das* eben die korrekte Verwendung *ist*; dass der Regel zu folgen *heißt*, an *dieser* Stelle *diesen* Wert zu erhalten. Damit legen wir aber nicht etwa neu fest, worin die korrekte Verwendung der Regel an dieser Stelle besteht, sondern wir appellieren an die Regel selbst. Die Bemerkung aus *Zettel* ist also kein Beleg für Frascolla Interpretation.

Ferner ist eine Erklärung durch Exemplifikation selbst nur eine andere Form der Deutung; eine Exemplifikation ist selbst nur ein Regelausdruck.[34] Beide Arten der Erklärung, durch Exemplifikation oder durch Angabe eines geschlossenen Regelausdrucks, vermögen *allein* nicht festzulegen, was an einer konkreten Stelle die richtige Verwendung der Regel ist (Dummetts 1. Interpretationsthese), sondern funktionieren nur insofern, als es entsprechende Gepflogenheiten gibt (PU §199). Vor dem Hintergrund entsprechender Gepflogenheiten erfüllen aber beide Arten der Erklärung unter verschiedenen Voraussetzungen ihren Zweck (d.h. sie bringen den Empfänger der Erklärung dazu, selbständig fortfahren zu können).

Jemand, der mit der mathematischen Schreibweise von Folgen nicht vertraut ist, der wird mit dem Regelausdruck $a_n = 3n$ erstmal nichts anzufangen wissen. Ihm hilft wahrscheinlich die Exemplifikation $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$. Einem mit dieser Schreibweise Vertrauten, der nun vor der Aufgabe steht, die Reihe $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots$ fortzusetzen, dem wird stattdessen möglicher Weise der Ausdruck $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ helfen.

Natürlich können wir dem Schüler nicht „alle" Verwendungen der Regel vormachen – überhaupt von „allen Verwendungen" der Regel zu sprechen, ist unsinnig (vgl. (Allgemeinheit)). Wir können nur *an verschiedenen Beispielen* vormachen, *wie man die Regel befolgt.* Dass wir nur begrenzt viele Beispiele geben können, heißt aber, gemäß Wittgenstein, in der Praxis weder, dass wir die Regel nur in diesen Beispielen verwenden können, noch dass der Schüler dabei nur lernt, die Regel in den Beispielfällen zu verwenden. Wie Wittgenstein in den RfÜ argumentiert, ist es weder grundsätzlich falsch zu sagen, dass die Verwendung der Regel beim Erfassen derselben „in irgendeinem Sinne gegenwärtig ist" (PU §195), noch davon zu sprechen, dass ein Unterricht über die vorgeführten Beispiele hinaus weißt (PU §208). Falsch ist nur daraus zu folgern, es gäbe hinter diesen Beispielen noch eine tiefere, eigentliche Erklärung, eine die auf mentale oder abstrakte Sach-

[34] Vgl. 6.2.2.

verhalte verweist: „Jede Erklärung, die ich mir selbst geben kann, gebe ich auch ihm." (PU §210, vgl. auch PU §209). Und dass jemand auf unsere Erklärungen hin selbstständig fortfahren kann, ist nicht mehr oder weniger erstaunlich als dass wir selbst es können (PU §211). Einer der zentralen Punkte der RfÜ war ja gerade, dass das Regelfolgen eine praktische Fähigkeit ist, die sich nicht beliebig weit theoretisch vermitteln lässt.

Kontra Frascolla und Wright behauptet Wittgenstein also nicht, dass unser Verständnis der Regel nicht über die bereits für richtig befundenen Anwendungen hinaus reicht, sondern nur, dass wir nicht mehr wissen (im Sinne eines Wissen-dass) als wir erklären können.

6.5 Rolle der Praktiken

In den RfÜ hebt Wittgenstein hervor, dass Regelfolgen essentiell „eine Praxis" ist (PU §202): „Einer Regel folgen, eine Mitteilung machen, einen Befehl geben, eine Schachpartie spielen sind *Gepflogenheiten* (Gebräuche, Institutionen)." (PU §199) und jemand richtet sich nur insofern nach einer Regel, „als es einen ständigen *Gebrauch*, eine *Gepflogenheit*, gibt." (PU §198, meine Hvbg.).

Im Folgenden werde ich zunächst untersuchen, wie die Rolle dieser Gepflogenheiten bzw. Praktiken zu verstehen ist, im dem ich sie von der meiner Auffassung nach falschen Interpretation dieser Rolle von Mathieu Marion (1998) abgrenze. Im Anschluss werde ich diese Rolle dann in Bezug auf die Frage nach den „Grundlagen" der Mathematik auswerten.

6.5.1 Praxis statt Deutung?

Laut Marion findet in den RfÜ eine *Umkehrung* des Verhältnisses von Regeln und Praxis statt:[35] Entgegen der ursprünglichen Annahme sind nicht die Regeln konstitutiv für unsere Praxis, sondern diese Praxis konstitutiv für unsere Regeln:

[35] Diese Deutung übernimmt Marion seinerseits von Hintikka (1989).

> *[T]he criteria* of rule-following no longer reside for [Wittgenstein] [...] in the 'involvement' of the symbolic expression of the rule in the process of following it. It lies in the complex of customs of which an act of following a rule is a part.
>
> [...]
>
> Such complexes are what he called 'language-games' [...]
>
> [R]ules are not constitutive of language-games; rather, it is the language-games that are prior to rules.
>
> [...]
>
> *The only criteria* for determining whether *a rule* has been followed reside in the whole of the language-game. (Marion 1998, S.157, meine Hvbg.)

Dass diese Interpretation exegetisch nicht haltbar ist, werde ich im Folgenden zeigen.[36]

Zunächst ist es meiner Ansicht nach in zweierlei Hinsicht unglücklich, den Komplex von Gebräuchen, den Wittgenstein in den RfÜ im Sinn hat, als „Sprachspiel" zu bezeichnen, wie Marion das hier tut. Erstens gibt es natürlich auch Regeln für nicht-sprachliche Tätigkeiten (wie z.B. die viel zitierten Schachregeln) und zweitens, wichtiger noch, spricht Wittgenstein in diesem Kontext eher von „gemeinsamer menschlicher Handlungsweise" (PU §206) oder „Lebensform" (PU §241), bzw. Produkten der „menschlichen Naturgeschichte" (vgl. PU §25; BGM I §64, VII §49).

Diese Begriffe sind sowohl wesentlich breiter als auch basaler als die der Sprachspiele. *Lebensform*[37] ist ein Begriff, der sich auf die Gänze unserer kulturellen, sozialen Praktiken bezieht, die unser Sprechen begleiten. Diese sind ferner historisch kontingent und wandelbar und unterliegen bestimmten empirischen Beschränkungen. Das bringt Wittgenstein zum Ausdruck, wenn er sie als Produkte menschlicher Naturgeschichte bezeichnet. Unsere menschliche Naturgeschichte umfasst für

[36] Auch Goldfarb (2012, S.87) und Mühlhölzer (2010, S.54 fn.44) betonen, dass die „Praxis" jetzt nicht einfach die Rolle übernimmt, die die „Deutung" gemäß der RfÜ nicht übernehmen kann. Sie beziehen sich allerdings nicht auf Marion.

[37] Vgl. zum folgenden auch Glock 1996, Kapitel „Lebensform".

ihn allerdings nicht nur unsere biologische Ausstattung, sondern auch unsere soziokulturelle Geschichte.[38] So ist es für die Entwicklung unserer Mathematik beispielsweise pragmatisch relevant, dass wir in dieser Figur ‚| | |' auf Anhieb sehen, um wie viele Striche es sich handelt, in dieser ‚||||||||||||||||' hingegen nicht und das hängt u.a. von unserem Sehvermögen ab – und ferner auch von der physikalischen Tatsache, dass Striche auf Papier nicht selbstständig verschwinden oder hinzu kommen, etc.[39] Darüber hinaus ist für die Entwicklung unser Mathematik aber beispielsweise auch relevant, dass wir Tauschgeschäfte machen, Holzbretter zuschneiden, um daraus Möbel zu fertigen, u.v.m.

Dass Wittgenstein in den RfÜ diese breite Kategorie von Praktiken vorschweben, und nicht einzelne umgrenzte Sprachspiele, wird deutlich, wenn er sagt:

> Richtig oder falsch ist, was die Menschen *sagen* [oder *tun*];[40] und in der Sprache [oder *den Gepflogenheiten*] stimmen sie überein. Dies ist [eine] Übereinstimmung der Lebensform. (PU §241)

Wittgenstein spricht hier von der *ganzen Sprache* (und begleitenden Handlungen), in die einzelne Sprachspiele ihrerseits eingebettet sind.

Ferner scheint eine Übereinstimmung in der Lebensform auch eher eine *notwendige Voraussetzung* für das Regelfolgen (im Allgemeinen) zu sein, als in einem konstitutiven Sinne *festzulegen*, wie einer konkreten Regel in einem konkreten Fall zu folgen ist: „Richtig oder falsch ist, was Menschen [im konkreten Einzelfall] sagen [oder tun]." Aber dass wir diese Einzelfälle überhaupt beurteilen können, setzt ein gewisses Maß von Übereinstimmung „in der Sprache" und damit „in der Lebensform" voraus. Es bedarf etwa einer Übereinstimmung im Gebrauch von Gesten (oder Wörtern) zum Ausdruck von Zustimmung oder Ablehnung (und in diesem Sinne im verbalen Fall „Übereinstimmung in der

[38] Im Gegensatz zu Strouds Interpretation.

[39] Die Rolle, die Wittgenstein dieser Art des empirischen Einfluss' auf die Entwicklung der Mathematik zugesteht, werde ich in Kapitel 7 genau untersuchen.

[40] In den Bemerkungen, die ich hier und im Folgenden zitiere, spricht Wittgenstein meist von sprachlichen Regeln. Ich sehe aber keinen Grund, warum sich diese Überlegungen nicht auch auf nicht-sprachliche Regeln übertragen lassen sollten.

Sprache") sowie ausreichend Regelmäßigkeit im Verhalten, so dass sich Versuche, einer Regel zu folgen überhaupt sinnvoll unterstellen lassen (vgl. dazu auch PU §207).[41]

In den *BGM* spricht Wittgenstein dann auch *explizit* von Lebensformen als „Voraussetzungen" dafür beurteilen zu können, ob jemand einer Regel folgt:

> [D]er Schüler hat die Regel (*so* gedeutet) inne, wenn er so und so auf sie reagiert.
>
> *Das* aber ist wichtig, daß diese Reaktion, die uns das Verständnis verbürgt, bestimmte Umstände, bestimmte Lebens- und Sprachformen als Umgebung, *voraussetzt.* (Wie es keinen Gesichtsausdruck gibt ohne Gesicht.)
>
> (Dies ist eine wichtige Gedankenbewegung.) (BGM VII §47, meine Hvbg.)

Der Vergleich in Klammern ist in zweierlei Hinsicht aufschlussreich dafür, wie Wittgenstein das Verhältnis zwischen Regel(n) und Lebens- und Sprachformen sieht:

Zum einen kann einen Gesichtsausdruck nur haben, wer ein Gesicht hat. Das heißt aber nicht, dass ein Gesicht allein einen bestimmten Gesichtsausdruck festlegen würde oder Gesicht und Gesichtsausdruck gar identische wären.

Ebenso können wir das Verhalten des Schülers nur eingebettet in bestimmte Lebens- und Sprachformen als Verstehen der Regel deuten (vgl. BGM VI §33: „Was wir in einer komplizierten Umgebung »einer Regel folgen« nennen, würden wir, wenn es isoliert dastünde,

[41] In diesem Sinne äußert sich auch Goldfarb (2012) in Bezug auf den Ausdruck „gemeinsame menschliche Handlungsweise", von dem Wittgenstein in §206 sagt, es sei das „Bezugssystem" mittels dessen wir fremde Sprachen deuten:

> Once one starts including enough in "practices" and "institutions" to merit the term "*gemeinsame menschliche Handlungsweise*", it should become clear that practices and institutions cannot play the kind of constitutive role that the interlocutor was after. The category is too broad; there is too much in it. Much in it is not germane to any one particular rule, but to our behavior in general. (Goldfarb 2012, S.88)

gewiß nicht so nennen."). Das heißt aber nicht, dass diese vorauszusetzenden Lebens- und Sprachformen *bestimmen* würde, wann wir dem Schüler Verständnis der Regel zuschreiben. Und sie bestimmen auch nicht, worin die korrekte Verwendung einer bestimmten Regel an einer bestimmten Stelle besteht,[42] wie Wittgenstein an anderer Stelle festhält:

> Die Übereinstimmung der Menschen, die eine Voraussetzung [z.B.] des Phänomens der Logik ist [also die Übereinstimmung in einer Lebensform], ist nicht eine Übereinstimmung der Meinungen, geschweige denn von Meinungen über Fragen der Logik [wie z.B., ob ein bestimmter Schluss logisch korrekt ist]. (BGM VI §49)

Die Frage nach der richtigen Verwendung einer Regel an einer bestimmten Stelle ist im Rekurs auf die Regel selbst zu klären (6.3.3).

Und zweitens gibt es nicht nur keinen Gesichtsausdruck ohne Gesicht, sondern auch keine Gesichter ohne Gesichtsausdruck: Selbst ein ausdrucksloses Gesicht hat einen, nämlich Ausdruckslosigkeit.

Ebenso wie sich Regeln nicht unabhängig von Lebens- und Sprachformen erklären lassen, lassen sich letztere nicht ohne Regeln vorstellen. Schon deshalb können sie in Bezug auf diese keine konstitutive Rolle übernehmen. In PPF §341-43 nennt Wittgenstein es einen „Circulus vitiosus" davon, dass es Mathematik in unserer Form nicht geben würde, wenn sich Ziffern auf dem Blatt selbstständig ändern würden, darauf zu schließen, dass „die Sicherheit der Mathematik [...] auf der Zuverlässigkeit von Papier und Tinte"[43] beruhe. Dies ist deshalb ein Zirkelschluss, weil wir die fragliche Zuverlässigkeit selbst nur anhand der mathematischen Regeln beurteilen können. Und auf dieselbe Weise wäre es ein Zirkelschluss zu behaupten, die Korrektheit von Regelverwendungen beruhe auf unseren lebensweltlichen Praktiken.[44]

[42] Auch Frascolla geht übrigens fälschlicher Weise davon aus, dass die Praktiken, von denen in den RfÜ die Rede ist, die Normativität der einzelnen Regelverwendungen konstituierten (vgl. z.B. 1994, S.122).

[43] Schon Frege weist darauf hin, dass solche Arten von Voraussetzungen *nicht* konstitutiv sind: Der Phosphorgehalt unseres Gehirns mag eine Voraussetzung dafür sein, dass wir den Satz des Pythagoras beweisen können, deshalb ist er aber noch lange nicht Teil des Beweises (Frege 1884, S.VI).

[44] Vgl. dazu auch PU §224:

Entgegen Marions Behauptung übernehmen die Praktiken („Lebensform“, „gemeinsame menschliche Handlungsweise“, „menschliche Naturgeschichte“) also gerade nicht die konstitutive Rolle, die gemäß Wittgensteins Gesprächspartner die Deutung des Regelausdrucks hätte übernehmen sollen.

6.5.2 Lebensformen als »Grundlagen« für regelgeleitete Tätigkeiten

Doch auch wenn Lebensformen und Aspekte der menschlichen Naturgeschichte nicht die Normativität einzelner Regeln konstituieren, stellen sie in gewisser Hinsicht die „Grundlagen“[45] für regelgeleitete Tätigkeiten dar.

Lebensformen sind, wie Wittgenstein es formuliert, „das Hinzunehmende, Gegebene“ (PPF xi §345). Sie sind Grundlagen im Sinne von Voraussetzungen, die nicht weiter hinterfragt werden können, selbst schon Regelfolgen inkorporieren und die ferner historischen Wandlungen unterworfen sind. Wittgenstein selbst bezeichnet Lebensformen als „*foundation* on which [language] grows“ (CE 404, zitiert nach Glock 1996, S.125) – und es gibt, wie bereits betont, meiner Meinung nach keinen Grund, diese Überlegung nicht auf nicht-sprachliche regelgeleitete Tätigkeiten auszuweiten.

Lebensformen und Aspekte der menschlichen Naturgeschichte bilden sozusagen das praktische Pendant zu unserem „Weltbild“ – jenem wandelbaren Gerüst von unhinterfragbaren Überzeugungen, das die Voraussetzung für jegliches Urteilen ist – über das Wittgenstein in *Über Gewissheit* schreibt:

> Mein Weltbild habe ich nicht, weil ich mich von seiner Richtigkeit überzeugt habe; auch nicht, weil ich von seiner

---

> Das Wort »Übereinstimmung« und das Wort »Regel« sind miteinander *verwandt*, sie sind Vettern. Lehre ich Einen den Gebrauch des einen Wortes, so lernt er damit auch den Gebrauch des andern.

Ähnlich äußert sich Wittgenstein in BGM VI §41.

[45] Dies teilt auch Glock: „Wittgenstein holds that *in so far as language [bzw. regelgeleitete Tätigkeiten im Allgemeinen] has foundations*, they are provided [...] by shifting patterns of communal behaviour.“ (Glock 1996, S.125)

> Richtigkeit überzeugt bin. Sondern es ist der überkommene Hintergrund, auf welchem ich zwischen wahr und falsch unterscheide. (ÜG §94)

Da die RfÜ in diesem Sinne aufzeigen, *inwiefern* sich sinnvoll von den Grundlagen regelgeleiteter Tätigkeiten sprechen lässt und wo die Grenzen des sinnvoll Hinterfragbaren liegen, sind sie insbesondere auch relevant für die am Anfang des Kapitels genannte Frage danach, ob und inwiefern sich sinnvoll von den „Grundlagen der Mathematik" sprechen lässt.

Nach der obigen Beschreibung haben diese „Grundlagen" sicherlich nichts gemein mit einer *Grundlegung* wie sie während der Grundlagenkrise der Mathematik Ende des 19., Anfang des 20. Jahrhunderts angestrebt wurde. Dafür, dass die Mathematik einer solchen Grundlegung auch gar nicht bedarf (BGM VII §16), argumentiert Wittgenstein in den *BGM*, wie in der Einleitung kurz angerissen (2.4.2 unten), meiner Meinung nach auf überzeugende Weise.

Wittgenstein zeigt aber nicht nur kritisch auf, weshalb solche Grundlegungsprogramme selbst im Fall ihrer mathematischen Durchführbarkeit ihren selbst deklarierten Anspruch, die Mathematik *damit* auf ein ein für alle mal abgesichertes Fundament zu stellen, nicht einlösen können. Er sagt auch positiv etwas darüber aus, von welcher Art von „Grundlagen" man in Bezug auf Mathematik stattdessen sinnvollerweise sprechen kann. Diese Grundlagen der Mathematik finden sich in unseren historischen Wandlungen und Aspekten menschlicher Naturgeschichte unterworfenen Lebensformen, in die unsere mathematischen Praktiken ihrerseits eingebettet sind. Diese Art von Grundlagen müssen nicht erst geschaffen werden, sie bestehen bereits. Sie sind notwendige, aber nicht konstitutive Voraussetzungen jedes Mathematiktreibens. Sie bilden das als gegeben hinzunehmende, nicht weiter hinterfragbare und offensichtlich praktisch ausreichend feste Fundament der Mathematik. Diese Grundlagen sind offensichtlich von Menschen geschaffen und so ist die Mathematik, trotz des unbestreitbaren Sonderstatus ihrer Sätze, „ein anthropologisches Phänomen" (VII §33).

Was ich zu tun habe, ist etwas, wie: das Amt eines Königs zu beschreiben; - wobei ich nicht in den Fehler verfallen darf, die königliche Würde aus der Nützlichkeit des Königs zu erklären; und doch weder Nützlichkeit noch Würde außer Acht lassen darf.

L. Wittgenstein
(BGM VII §3)

Kapitel 7

Mathematik und Empirie

[1]In den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* schreibt Wittgenstein:

> Es ist der Mathematik wesentlich, daß ihre Zeichen auch in *Zivil* gebraucht werden.
>
> Es ist der Gebrauch außerhalb der Mathematik, [. . .] was das Zeichenspiel zur Mathematik macht. (*BGM* V §2)

Damit hat er zweifellos Recht. Die Mathematik ist bekannterweise alles andere als ein reines Formelspiel, unser Alltag wäre ohne sie gar nicht denkbar: Wir verwenden sie zur Beschreibung der Natur in den Naturwissenschaften, aber auch beim Kochen, beim Tennisspielen, in Wetter-, Wahl- und Wirtschaftsprognosen, sowie in der Konstruktion technischer Geräte oder bei der Verschlüsselung sensibler Daten beim Online-Banking und an zahlreichen anderen Stellen.[2]

Die Brauchbarkeit der Mathematik in diesen Bereichen – tradi-

[1]Dieses Kapitel basiert auf meinem Artikel „Mathematik und Empirie beim späten Wittgenstein“ in *Zeitschrift für philosophische Forschung* (Schlegel 2015).

[2]Ich stimme mit Glocks Interpretation überein, nach der Wittgenstein keinesfalls die außermathematische Anwendbarkeit jedes einzelnen mathematischen Satzes oder jedes Teils der Mathematik verlangt, wohl aber dass die nicht direkt empirisch anwendbaren Teile in irgendeiner Weise mit solchen verbunden sind, die empirisch anwendbar sind (Glock 1996, S.235). Für diese exegetische These werde ich in 7.3.2 argumentieren.

Während es sicherlich im Widerspruch zur mathematischen Praxis stünde zu behaupten, dass jeder einzelne mathematische Satz einer außermathematischen Verwendung bedarf, leuchtet diese weniger strikte Variante auch aus systematischer Sicht ein. Ohne diese zumindest indirekte Anwendbarkeit wäre die Mathematik keine Wissenschaft, sondern tatsächlich nur ein Spiel.

tionell liegt der Fokus in der philosophischen Betrachtung besonders auf der Anwendbarkeit von Mathematik in den Naturwissenschaften – wirft die in der Philosophie der Mathematik kontrovers diskutierte Frage auf, welcher Zusammenhang zwischen Mathematik und empirischen Gegebenheiten besteht.

7.1 Problemstellung

In den späten Nachlassbemerkungen betont Wittgenstein immer wieder die Relevanz der Gegebenheiten der Welt, der Erfahrung und der Bewährung für die Mathematik. Dies ist in den letzten Jahren auf verschiedene Weise als spätere Abkehr oder zumindest Relativierung seiner bekannten These, mathematische Sätze seien grammatische Sätze und damit der Empirie gegenüber autonom, gelesen worden (Ramharter & Weiberg 2007, Schroeder 2015, Steiner 2009, Weiberg 2008).[3]

Wie in 3.2.1 bemerkt, stünde die so interpretierte Position Wittgensteins aus systematischer Sicht vor Problemen: Die These, dass mathematische Sätze nicht grundsätzlich von empirischer Falsifikation ausgeschlossen sind, ist schwer mit der tatsächlichen mathematischen Praxis zusammenzubringen. Ferner kann die Rolle von Beweisen so oft nicht mehr angemessen erfasst werden – ein Problem das sich, wie ich in der Kapitel 2 dargestellt habe, für die meisten Positionen stellt, die irgendeine Form von Empirismus bezüglich Mathematik vertreten.

Ziel dieses Kapitels ist es, die mit den genannten Interpretationen verbundenen Schwierigkeiten darzustellen und zu zeigen, dass diese Interpretationen nicht nur aus *systematischer Sicht* problematisch sind, sondern auch aus *exegetischer Sicht* nicht überzeugen.

Dazu diskutiere ich wesentliche Aspekte von Wittgensteins Position zu der Frage nach dem Verhältnis Mathematik und empirischen Gegebenheiten und gebe folgende zwei Teilantworten auf diese Frage:

1. Die Gültigkeit der Regeln, die in mathematischen Sätzen ausge-

[3] Es handelt sich im Vergleich zu der für die Debatte so nachhaltig einflussreichen Fehlinterpretation der RfÜ (s. letztes Kapitel) hierbei also eher um einen jüngeren Trend in der Interpretation von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik.

drückt werden, ist unabhängig von empirischen Gegebenheiten.

2. Der Inhalt der Mathematik wird von empirischen Gegebenheiten zwar angeleitet und begrenzt, aber nicht vorherbestimmt.

Diese Teilantworten entwickle ich, indem ich jeweils eine der mir problematisch erscheinenden alternativen Interpretation von Wittgensteins Position zurückweise.

Die hier entwickelten Argumente beziehen sich ausschließlich auf diejenigen mathematischen Regeln, die in mathematischen Sätzen (im Sinne von 5.1) ausgedrückt werden und sind nicht ohne Weiteres auf andere mathematische Regeln, also auf Axiome und Definitionen, übertragbar.

7.2 Bewährung und Gültigkeit

Ich werde im Folgenden zunächst für die exegetische These argumentieren, dass Wittgenstein der Empirie zwar eine pragmatische Relevanz für die Entwicklung von Mathematik zugesteht, er aber darauf beharrt, dass die Gültigkeit mathematischer Regeln und mithin ihre Unumstößlichkeit davon völlig unabhängig bleibt (7.2.1). Für diese Sicht werde ich sodann eine Wittgensteinianische Begründung vorschlagen (7.2.2).

7.2.1 Empirische Gegebenheiten tangieren Brauchbarkeit mathematischer Sätze, nicht deren Gültigkeit

Eine einschlägige Stelle für Wittgensteins Beschäftigung mit dem Verhältnis von Mathematik und empirischen Gegebenheiten ist BGM I §37. Hier entwirft Wittgenstein das folgende Szenario:

> Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. [...] Und

> analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, *wie wir jetzt sagen würden*, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegkäme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.
>
> „Aber wäre dann nicht doch noch 2+2=4?" – Das Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden. –

Zunächst einmal ist es wichtig zu bemerken, dass Wittgenstein hier nur über das *Rechnen* spricht, also über die Arithmetik, und nicht etwa von der Mathematik im Allgemeinen, wie von anderen Interpreten oft vorschnell angenommen worden ist. (Weiberg (2008), Steiner (2009); Schroeder (2015) ist vorsichtiger in seinen Formulierungen, diskutiert die Übertragbarkeit auf andere Teile der Mathematik aber nicht.) Wie im letzten Kapitel erörtert, lassen sich Bemerkungen über elementare Mathematik nicht ohne Weiteres auf höhere Mathematik übertragen – insbesondere was den „quasi-empirischen Ursprung" angeht.

In Bezug auf den Zusammenhang zwischen Rechnen und empirischen Gegebenheiten werden nun zwei Fälle unterschieden. Der erste Fall ist unkontrovers: Wenn die Bohnen sich auf die oben beschriebene Weise verhielten, würden wir an den Sätzen der Arithmetik festhalten und Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären, bzw. feststellen, dass Bohnen *kein Anwendungsfall* für die Arithmetik sind. Ebenso ist die Arithmetik ja beispielsweise auch nicht auf Wassertropfen anwendbar, bei denen zwei Tropfen und zwei Tropfen einfach einen großen Tropfen ergeben.

Im zweiten Fall, wenn sich Dinge mehrheitlich spontan vermehren oder dezimieren würden, hätte das Rechnen keine Anwendung mehr und „damit ein Ende". Wie ist nun dieser Fall zu verstehen? Wittgensteins Präzisierung auf die Nachfrage seines fiktiven Gesprächspartners am Ende der Bemerkung macht deutlich, dass er das „Ende" des Rechnens als ein praktisches Ende verstanden wissen will. Wir würden in diesem zweiten Fall nicht mehr rechnen, weil das Rechnen keine Anwendung hätte; wir könnten mit unseren arithmetischen Regeln also nichts mehr anfangen. Sie wären folglich *unbrauchbar*. Aber selbst in diesem Fall wäre das Rechnen natürlich noch immer möglich. Man könnte die Mathematik als eine Art Spiel betreiben, in dem nach bestimmten Regeln Symbol-Ketten aus anderen Symbol-Ketten erzeugt werden (vgl. BGM III §38); etwa wie Schach, dessen Regeln außerhalb des Spiels ebenfalls keine Verwendung haben. Aufgrund der oben dargestellten Überlegungen würden wir hier wahrscheinlich nicht mehr von Mathematik (als wissenschaftliche Disziplin) sprechen.

Wenn jedoch, wie in der Bemerkung angedeutet, nicht einmal unsere *Rechenhilfsmittel* wie Finger oder Strichsymbole statisch blieben, hätte das Rechnen vermutlich sogar insofern ein Ende, als dass wir keine Rechnungen mehr *durchführen*, das Rechnen also nicht einmal mehr als solch ein inhaltsloses Formelspiel betreiben könnten. Großmeister im Schach können eine Partie auch ohne Brett und Figuren spielen, indem sie z.B. die jeweiligen Züge auf einem Blatt notieren. Blieben aber nicht einmal diese Notizen auf dem Papier stehen, würde wahrscheinlich nach einiger Zeit Verwirrung ausbrechen. Da der Spielstand allein über die Erinnerung nicht zuverlässig prüfbar wäre, wäre es in so einem Fall nicht mehr möglich, Schachpartien zu spielen. Ebenso sind elementare arithmetische Rechnungen sicherlich „im Kopf" durchführ- und anschließend vermittelbar. Rechnungen mit entsprechend großen Zahlen oder gar kompliziertere Mathematik scheinen hingegen ohne das Hinschreiben von Symbolen zur Visualisierung unmöglich zu sein. Wir würden in diesem dritten Fall folglich an eine *anthropologische Grenze* stoßen, was unsere kognitiven Fähigkeiten anbelangt, Regeln zu folgen. Die Rechnungen, die zu unseren arithmetischen Sätzen führen, wären dann nicht nur unbrauchbar, sondern sogar *nicht mehr ausführbar*.

Anzunehmen ist aber, dass sich Wittgenstein hier gar nicht primär für diese exotischen Fälle interessiert, sondern dass es ihm in erster Linie darum geht, etwas über *unsere Mathematik* zu verdeutlichen. Und in Bezug darauf ist weniger interessant, was bei einer plötzlichen grundlegenden Veränderung der Verhältnisse passieren würde, sondern vielmehr, inwiefern die Mathematik von empirischen Gegebenheiten abhängt. Der entscheidende Punkt ist dann, dass wir in einer Welt wie der im zweiten Fall beschriebenen gar keine Arithmetik herausbilden würden – ebenso wenig wie die Begriffe „dazukommen“ und „wegkommen“, wie Wittgenstein in der Klammerbemerkung festhält. Und daraus lässt sich wiederum folgern, dass die empirischen Gegebenheiten der Welt, etwa die Stabilität fester Körper etc., eine zentrale genetische Rolle für die Entwicklung der Arithmetik gespielt haben. Diese Gegebenheiten tangieren aber nicht die *Gültigkeit* mathematischer Regeln. Das scheint mir jedenfalls dadurch nahegelegt zu werden, dass Wittgenstein auf die Frage nach dem Weiterbestehen der Gültigkeit antwortet, dass die Brauchbarkeit (und nicht die Gültigkeit) dasjenige ist, was dem Satz nun fehlt.

Diese Interpretation ist allerdings nicht unumstritten. So schreibt Severin Schroeder zur selben Bemerkung: „Although no individual experience can disprove an arithmetical equation, used as a norm of representation, a regular discrepancy between rule and experience would undermine the rule’s usefulness and eventually make us abandon or change it.“ (Schroeder 2015)[4] Anja Weiberg (2008) spricht von einem „*Kriterium* der Bewährung des Rechnens“ (Weiberg 2008, S.31, meine Hvbg.), das zu einer „Relativierung des normativen Charakters der Mathematik“ führe. Und schließlich halten Ramharter & Weiberg zur

[4] Schroeder gibt hier zwei möglich Fälle an: „abandon or change“. Ersterer wäre durchaus kompatibel mit meiner Interpretation, wenn „abandon“ so verstanden wird, dass man die Regel einfach „stehen lässt“ und sich von ihr „abwendet“. Man würde sie dann also nicht mehr benutzten und sich stattdessen brauchbareren Regeln zuwenden; die unbrauchbaren Regeln blieben aber nach wie vor gültig. Schroeder scheint „abandon“ hier allerdings eher im Sinne von „beenden“ oder „abschaffen“ zu verwenden und damit zu behaupten, dass wir der Regel unter den beschriebenen Umständen ihre Gültigkeit wieder entziehen würden.

Im zweiten Fall („change“) ist die Gültigkeit der Regel schließlich offensichtlich betroffen. Wenn wir eine einzelne mathematische Regel, die ja immer in einem System von mathematischen Regeln steht, *ändern*, dann wird die alte Regel damit ungültig. Ein anderer Fall wäre es, wenn wir in einer solchen Situation einen völlig neuen Kalkül entwickelten. Dann bliebe die Gültigkeit der alten Regel (innerhalb des alten Systems) bestehen und wir würden lediglich fortan ein neues Stück Mathematik zur Beschreibung der relevanten empirischen Gegebenheiten verwenden (vgl. etwa den Wechsel von Newtonscher Mechanik zur Einsteinschen Relativitätstheorie).

Gültigkeit mathematischer Regeln in den *BGM* generell fest: „Die Härte des logisch-mathematischen Muß hat zwei Ingredienzien: Sie besteht nur, weil *wir* sie verleihen; aber wir verleihen sie *aufgrund* von „harten Tatsachen“, d.h. alltäglicher Erfahrung und Praxis.“ (Ramharter & Weiberg 2007, S.231-32, 2. Hvbg. ist meine)

7.2.2 *Warum* die Gültigkeit mathematischer Sätze von der Empirie unabhängig ist

Für die von mir favorisierte Alternative stellt sich nun die Frage nach Gründen dafür, warum die Gültigkeit von der Empirie unberührt bleiben soll. Leider äußert sich Wittgenstein dazu nicht direkt. Mark Steiner, der den kurzen Dialog am Ende der Bemerkung ebenfalls als Trennung von Anwendbarkeit und Gültigkeit interpretiert, begründet das damit, dass die Gültigkeit mathematischer Regeln nicht tangiert wird, weil *Regeln* generell nicht falsifiziert werden können: „Rules (and this is a ‘grammatical’[5] point) – any rules – cannot be falsified.“ (Steiner 2009, S.15)

Dieser grammatische Punkt leuchtet zwar ein, schließt aber die anderen Interpretationen nicht aus. Denn diese anderen Interpretationen sehen durch die Bemerkung gerade in Frage gestellt, ob der *Regelstatus* mathematischer Sätze wirklich unumstößlich ist.

Regeln können zwar nicht falsifiziert werden, aber ihre Geltung lässt sich sehr wohl bestreiten oder beenden, wie das z.B. in Debatten um moralische und rechtliche Normen regelmäßig geschieht. Rechtliche Normen lassen sich beispielsweise dadurch bestreiten, dass man auf ihre unzulässige Entstehung verweist. Wenn etwa ein Verfassungsgericht feststellt, dass ein Gesetz verfassungswidrig ist, kann es dieses daraufhin für nichtig erklären. Auch Nichtanwendbarkeit kann sicherlich ein Grund sein, ein Gesetz aus dem Gesetzbuch zu streichen. So wurde z.B. im Zuge der deutschen Wiedervereinigung der damalige Artikel 23 des Grundgesetzes aufgehoben, weil es nun keine deutschen Gebiete mehr gab, die dem Geltungsbereich des Grundgesetzes beitreten konn-

[5] Steiner verwendet den Ausdruck „Grammatik“ hier im Wittgenstein’schen Sinne. Er meint also mit dieser Äußerung, dass die Gebrauchsregeln für den Ausdruck „Regel“ ausschließen, dass sich sinnvoll von „falsifizierbaren Regeln“ sprechen lässt.

ten. Letzteres wäre dann, anders als die Verfassungswidrigkeit, kein juristisches Argument mehr.

Ferner können Sätze, die in bestimmten Zusammenhängen Regeln ausdrücken, in anderen Zusammenhängen durchaus verifiziert oder falsifiziert werden. Das gilt zum Beispiel für Naturgesetze. Wir prüfen unsere Erfahrung an ihnen, sie bilden so Regeln unseres empirischen Urteilens. Es kann aber durchaus sein, dass sie im Rahmen einer entsprechenden neu entwickelten Theorie nicht mehr diese Rolle von Maßstäben spielen, sondern selbst als empirische Hypothesen fungieren und schließlich sogar durch ein im Rahmen dieser Theorie entwickeltes Experiment falsifiziert werden.

Steiner hat also Recht damit, dass mathematische Sätze nicht falsifiziert werden können, weil sie Regeln ausdrücken und Regeln generell nicht falsifizierbar sind. Das schließt aber weder aus, dass die Geltung der durch mathematische Sätze ausgedrückten Regeln auf Grundlage von Brauchbarkeits- und Bewährungserwägungen bestritten und beendet werden kann, noch dass die betroffenen Sätze (die dann keine gültigen mathematischen Regeln mehr wären und damit auch keine *mathematischen Sätze* mehr) anschließend korrekterweise als „falsch“ bezeichnet werden können. Im Folgenden werde ich dafür argumentieren, dass dies aber aus *anderen Gründen* ausgeschlossen werden kann, die mit den Besonderheiten *mathematischer* Regeln zu tun haben.

In BGM VII §3 trennt Wittgenstein die Bewährung in der Erfahrung explizit von der Gültigkeit und deutet einen treffenderen Grund für diese Trennung an als Steiner:

> Die [mathematische][6] Regel ist als Regel losgelöst, steht,

[6] In dem Beispiel, an welches diese Bemerkung unmittelbar anschließt, ist von der Regel 25 X 25=625 die Rede. Genau genommen geht es hier also um eine arithmetische Regel. Deshalb ist in dieser Bemerkung auch von den „Tatsachen *täglicher* Erfahrung“ die Rede. Für diese Beschränkung sehe ich allerdings keinen systematischen Grund. Meiner Auffassung nach lässt sich das Argument durchaus auf andere mathematische Sätze übertragen, wobei man dann gegebenenfalls wahrscheinlich nicht mehr von „täglicher Erfahrung“ sprechen würde, sondern allenfalls z.B. von der „täglichen Erfahrung des forschenden Physikers“ o.ä..

Ferner darf diese Ausweitung auch hier nicht so verstanden werden, dass Wittgenstein fordert, dass jeder mathematische Satz direkt eine außermathematische Verwendung hat, wofür ich, wie bereits gesagt, in 7.3.2 argumentieren werde.

> sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen täglicher Erfahrung sind.
>
> Was ich zu tun habe, ist etwas, wie: das Amt eines Königs zu beschreiben; - wobei ich nicht in den Fehler verfallen darf, die königliche Würde aus der Nützlichkeit des Königs zu erklären; und doch weder Nützlichkeit noch Würde außer Acht lassen darf.

Die Bemerkung behauptet folgende Analogie zwischen der Funktion mathematischer Regeln und dem Amt des Königs: Sowohl der Aspekt der Würde als auch der Aspekt der Nützlichkeit des Königs gehören zu einer vollständigen Beschreibung des Königsamtes. Ebenso gehören sowohl „die Tatsachen täglicher Erfahrung“, d.h. die Bewährung mathematischer Sätze in der Anwendung, als auch der Umstand, dass ihnen, wie Wittgenstein an andere Stelle betont, „die *Würde* einer Regel“ (BGM I §165) zukommt, zu einer vollständigen Beschreibung der Funktion mathematischer Regeln. Man darf aber nicht, so warnt Wittgenstein, in den Fehler verfallen, „die Würde aus der Nützlichkeit“, bzw. – im Sinne der Analogie – den Regelstatus aus der Bewährung zu erklären.

Die gewählte Analogie legt nahe, dass damit Folgendes gemeint ist: Nützlichkeit bzw. Anwendbarkeit ist etwas, das sich – in Abhängigkeit von den Gegebenheiten der Welt – *zeigen* kann oder auch nicht. Die Würde bzw. der Regelstatus ist hingegen etwas, das, wie Ramharter & Weiberg zu Recht betonen, *verliehen* wird. Dabei erfolgt die Verleihung nun typischerweise selbst nach Regeln, die, kontra Ramharter & Weiberg, *unabhängig* von dem Aspekt der Erfahrung und der Nützlichkeit sind. Wir verleihen die Regelwürde aufgrund eines Beweises/anderer mathematischer Regel, nicht aufgrund „alltäglicher Erfahrung“, wie die beiden behaupten.[7] Im Fall des Königs gibt es eine entsprechende Thronfolge-Regelung und über die Gültigkeit mathematischer Regeln entscheidet das Vorliegen oder Nichtvorliegen eines Beweises. Entsprechend kann sich nur die Nützlichkeit bzw. Anwendbarkeit durch ver-

[7] Siehe dazu Glock 1996, S.228: „The result of a calculation is a rule and yet ‘not simply stipulated but produced according to rules’ [...] If it were otherwise, we would not need the techniques of calculation or proof.“

änderte Gegebenheiten in der Welt ändern, nicht aber die einmal verliehene Würde, denn die Gegebenheiten der Welt spielen in den Regeln der Verleihung keine Rolle.

Wittgensteins Bemerkungen zur Mathematik aus *Über Gewißheit* unterstützen die exegetische These, dass er einen expliziten Unterschied zwischen mathematischen Sätzen und anderen Sätzen, die Regeln ausdrücken, macht. Dort heißt es:

> Dem mathematischen Satz ist gleichsam *offiziell* der Stempel der Unbestreitbarkeit aufgedrückt worden. D.h.: „Streitet Euch um andre Dinge; *das* steht fest, ist eine Angel, um die sich euer Streit drehen kann."
>
> Und das kann man *nicht* von dem Satz sagen, daß *ich* L.W. heiße. (ÜG §655-56, 1. Hvbg. ist meine)

Bekanntlich setzt sich Wittgenstein in ÜG mit der Unbezweifelbarkeit sogenannter *Angelsätze* (hinge propositions) auseinander. Solche Sätze, wie z.B. „Die Erde hat lange vor meiner Geburt existiert.", „Ich habe zwei Hände." oder eben „Ich heiße Ludwig Wittgenstein" (von Wittgenstein geäußert) gehören nicht zu den möglichen Urteilen, sondern müssen vorausgesetzt werden, um überhaupt urteilen zu können. Sie drücken Regeln des Urteilens aus und können daher selbst nicht sinnvoll in Frage gestellt werden. In der zitierten Bemerkung grenzt Wittgenstein mathematische Sätze nun dezidiert von (solchen) Angelsätzen ab. Während letztere „nicht ausdrücklich gelernt", sondern allenfalls „nachträglich gefunden" (ÜG §152) werden, sind mathematische Sätze *offiziell* vom Zweifel ausgenommen.[8] Und zweifelsohne

[8]Wie in der Einleitung (1.2) erwähnt und im letzten Kapitel näher ausgeführt 6.4.1 besteht dieser Unterschied auch zwischen mathematischen und *grammatischen* Sätzen: Zumindest die grammatischen Regeln unserer Muttersprache lernen wir meist auch nicht explizit.

Ich würde mathematische Sätze nicht als Angelsätze, sondern als grammatische Sätze auffassen (also als Regeln der Begriffsverwendung, nicht als Regeln des Urteilens), wie Wittgenstein dies in den *BGM* ja auch an mehreren Stellen explizit tut (vgl. 1.2). Sätze über die *Anwendbarkeit* der Mathematik (z.B. der Arithmetik auf Bohnen) würde ich hingegen als Angelsätzen auffassen. Dass sich die Sätze der Arithmetik in der Beschreibung von Bohnen, Fußbällen, Kuchenstücken usw. verwenden lassen, setzen wir in unseren Urteilen im Alltag ständig voraus, ohne dass wir uns dieser Voraussetzung explizit bewusst wären. Die Grenzen zwischen beiden Arten von Regeln allerdings ohnehin nicht scharf.

wird ihnen der „Stempel der Unbestreitbarkeit“ nicht willkürlich aufgedrückt, sondern auf Grundlage ihrer Beweise.

Wegen dieser von Wittgenstein betonten Besonderheit mathematischer Regeln erscheint es mir auch unangebracht, die in der Flussbettmetapher (ÜG §96) formulierte Eigenschaft von Angelsätzen, zunächst zu Regeln zu erstarren, sich aber auch wieder zu Erfahrungssätzen verflüssigen zu können, auch auf mathematische Sätze zu übertragen, wie Weiberg (2008, S.31) das tut.

7.2.3 Mögliche Einwände und Erwiderungen

Um einem möglichen Einwand vorzubeugen: Da wir es sind, die die entsprechende Praxis etablieren, innerhalb derer die Würde verliehen wird, können wir diese Würde selbstverständlich auch wieder entziehen. Und Nutzlosigkeit bzw. Unbrauchbarkeit wären sicherlich gute Gründe dafür.[9] Aber dies käme einer Abschaffung der ganzen Praxis, der Monarchie oder der Mathematik, wie wir sie kennen, gleich. *Innerhalb* der entsprechenden Praxis steht Nützlichkeit bzw. Brauchbarkeit als Begründung für die Verleihung der Würde bzw. des Regelstatus nicht zur Verfügung.

Wir können zwar bestimmte Beweisverfahren aus außermathematischen Gründen aus der mathematischen Praxis verbannen, wie das die Intuitionisten (allerdings erfolglos) versucht haben, oder die Praxis um neue Beweisverfahren erweitern, wie das in Bezug auf Computer-Beweise zu geschehen scheint. Die Zulassung von Beweisverfahren mag damit empirischen Einflüssen und Erwägungen unterliegen. Die Gültigkeit von den mathematischen Regeln, die in *mathematischen Sätzen* ausgedrückt werden, wird aber nicht mit diesen empirischen Erwägungen begründet, sondern im Rekurs auf deren Beweise. Und die Beweise *selbst* verweisen typischerweise gerade *nicht* auf empirische Gegebenheiten. Ebenso kann in einer Monarchie die Thronfolgeregelung geän-

Ob und wie sich grammatische Sätze und Angelsätze von einander unterscheiden lassen, ist jedenfalls an dieser Stelle für das Argument nicht entscheidend, da, wie gesagt, der selbe Unterschied auch zwischen mathematischen und (anderen) grammatischen Sätzen besteht.

[9] In Bezug auf mathematische Regeln wäre, wie in Fußnote 2 bemerkt, die Unbrauchbarkeit außerhalb der Mathematik allein sicherlich noch kein guter Grund, wohl aber die Unbrauchbarkeit *außerhalb und innerhalb* der Mathematik.

dert werden, wie das zum Beispiel 1701 in England geschehen ist, als durch den Act of Settlement Katholiken von der Thronfolge ausgeschlossen wurden, oder 1980 in Schweden, als durch einen Parlamentsbeschluss die Thronfolge auf weibliche Nachkommen erweitert wurde. Und diese Änderungen sind oft von praktischen Erwägungen geleitet. Die Inthronisation erfolgt aber auf Grundlage der Thronfolge-Regelung und diese *selbst* involviert typischerweise *keine* Nützlichkeitskriterien.

Die Aspekte der Anwendbarkeit und Nützlichkeit haben daher zwar einen Einfluss darauf, welche spezifische Art von Mathematik oder Monarchie wir herausbilden; sie haben beispielsweise einen Einfluss darauf, welche Axiomensysteme wir aufstellen und auf welche Bereiche der Mathematik wir unser Forschungsinteresse fokussieren. Wir können aber weder einen *bewiesenen* mathematischen Satz für ungültig erklären, weil er unbrauchbar ist, noch einen Monarchen absetzen, weil er unnütz ist, *ohne damit zugleich* wesentliche Prinzipien der Mathematik und der Monarchie zu verletzen. Dieser Punkt ist unabhängig davon, ob es gute Gründe gibt, die Monarchie abzuschaffen oder die Gültigkeit dessen, was wir mathematische Sätze nennen künftig davon abhängig machen, ob ein Gremium von Experten befindet, dass sie ausreichend interessante außermathematische Anwendungen haben.

Vielleicht würden wir eine solche Praxis, in der es keine Beweise gäbe sogar immer noch als „Mathematik" bezeichnen. Wittgenstein betont sicherlich zu Recht, dass es sich bei diesem Begriff um einen Familienähnlichkeitsbegriff handelt (BGM V §46, VII §33). Die alten Ägypter verfügten mit ihren aus der Erfahrung gewonnenen Berechnungs- und Vermessungsregeln im Prinzip über eine Praxis der oben beschriebenen Art. Und wir bezeichnen dies durchaus als „Mathematik" oder zumindest „Vorläufer der Mathematik". Eines lässt sich jedoch mit Sicherheit festhalten: Wenn wir die mathematische Praxis so ändern, dass *bewiesene Sätze* für ungültig erklärt werden können, weil sie sich als unbrauchbar in der empirischen Anwendung erweisen, wäre das aber ein methodischer Paradigmenwechsel, wie es ihn in der Mathematik seit ca. 2500 Jahren nicht mehr gegeben hat.

Man könnte nun versucht sein aus exegetischer Sicht Folgendes einzuwenden: Selbst wenn mathematische Sätze sich gegenüber anderen

Regeln dadurch auszeichnen, dass sie über Beweise eingeführt werden, heißt das nicht, dass ihre Gültigkeit damit dem empirischen Einfluss entzogen wäre. Die Beweise beruhen schließlich bei Wittgenstein selbst wiederum auf Erfahrung. So könnte man ihn jedenfalls verstehen, wenn er schreibt: „Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Experiment sein – wird dann aber einfach als Bild genommen“ (BGM III §23). Das würde aber nichts daran ändern, dass es innerhalb der mathematischen Praxis nicht zulässig ist, den Status eines mathematischen Satzes zu ändern, weil die entsprechenden Experimente plötzlich mehrheitlich anders ausgehen. Sobald wir den Schritt von empirischen Vermutungen bezüglich Zahlen und Figuren zur echten Arithmetik, Geometrie etc. vollzogen haben, wird der Beweis entscheidend. Das macht die Mathematik als Disziplin ja gerade aus. Deshalb gilt der Schritt von der empirischen Mathematik der alten Ägypter zur Axiomatisierung und Einführung deduktiver Beweisverfahren durch die alten Griechen als Begründung der modernen Mathematik.

In dem Moment, in dem die Beweise allerdings gar nicht mehr reproduziert und vermittelt werden könnten – mangels Hilfsmittel, wie in 7.2.1 beschrieben –, gäbe es natürlich ein Problem. Dann wären sie keine Beweise und die entsprechenden mathematischen Sätze folglich auch keine mathematischen Sätze mehr, zumindest nach Wittgensteins antiplatonistischer Position. Zugleich würde dann aber die Mathematik als Praxis komplett zusammenbrechen und es ist unklar, was „Beweis“ und „Satz“ dann noch heißen sollen.

Aus systematischer Sicht ist die Analogie zwischen Regel- und Königswürde überzeugend. In der mathematischen Praxis ist das Vorliegen eines Beweises das notwendige und hinreichende Kriterium für die Wahrheit eines mathematischen Satzes bzw., in Wittgensteins Beschreibung, für die Gültigkeit der darin ausgedrückten mathematischen Regel. Brauchbarkeit mag zwar einen pragmatischen, psychologischen oder gar moralischen Grund darstellen, bestimmte Teilgebiete der Mathematik zu verfolgen und andere nicht (und auch die Folgerung aus BGM I §37, dass gänzlich unbrauchbare Systeme gar nicht erst entwickelt werden, scheint zur Praxis zu passen), aber sie ist kein *mathematischer* Grund, einen Satz anzunehmen. Selbst einer mathematischen

Vermutung[10] wird nicht auf Grund ihrer Bewährung der Status eines mathematischen Satzes verliehen. Die Goldbachsche Vermutung wurde mittlerweile mit Computer-Unterstützung für alle geraden Zahlen bis 26×10^{17}getestet, ist also ziemlich gut bewährt und die Brauchbarkeit der Riemannschen Vermutung offenbart sich darin, dass zahlreiche, später auf komplizierterem Wege bewiesene Resultate der analytischen Zahlentheorie zuvor uARV – „unter Annahme der Riemannschen Vermutung“ – hergeleitet werden konnten. Trotzdem steht es unter Mathematikern nicht mal zur Debatte, „Jede gerade Zahl größer als zwei lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“ oder „Alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion haben Realteil.“ deshalb zum mathematischen Satz zu erklären. Es gehört zu den Kriterien *mathematischen* Schließens, dass wir keine Bezugnahme auf Bewährung, Brauchbarkeit oder gar empirische Erfahrung als Argument zulassen.

Als Beleg für Wittgensteins Aufweichung des Unterschieds zwischen mathematischen und empirischen Sätzen, wird gelegentlich (z.B. von Schroeder 2015) die folgende Bemerkung zitiert:

> Es ist ja gar kein Zweifel, daß mathematische Sätze in gewissen Sprachspielen die Rolle von Regeln der Darstellung spielen, im Gegensatz zu Sätzen, welche beschreiben.
>
> Aber das sagt nicht, daß dieser Gegensatz nicht nach allen Richtungen hin abfällt. Und das wieder nicht, daß er nicht von großer Wichtigkeit ist. (BGM VII §6)

Was meint Wittgenstein hier, wenn er sagt, der „Gegensatz“ zwischen beschreibenden empirischen Sätzen und mathematischen Sätzen als Regeln der Darstellung falle „nach allen Richtungen hin ab“?

Ein Blick in den unveröffentlichten *Nachlass* kann an dieser Stelle Aufschluss geben. Unmittelbar vor diesen Zeilen beschäftigt sich Wittgenstein nämlich mit der Frage inwiefern das Einleuchten mathematischer *Axiome* von der Erfahrung unabhängig ist:

[10]Die bei Wittgenstein an mehreren Stellen diskutierte Frage, ob mathematische Vermutungen überhaupt einen Sinn haben, klammere ich hier aus. Sie wird im nächsten Kapitel behandelt.

> Über das Einleuchten der Axiome. Die Axiome eines mathematischen Systems müssen selber mathematische Sätze sein? Und was macht sie dazu? Daß sie einleuchten? Und wie stark müssen sie einleuchten? Wenn sie nun einleuchten und die Erfahrung ihnen widerspricht — wer gewinnt dann? Oder stellen wir uns ihre Anwendung immer so vor, daß Erfahrung ihnen nicht widersprechen kann, weil wir sie zu grammatischen Sätzen machen? Aber damit sie gute grammatische Sätze sind muß sich doch wieder viel Erfahrung leicht nach ihnen darstellen lassen. (MS 124 S.32-33)

Wie in 5.1 bemerkt, verwendet Wittgenstein den Ausdruck „mathematischer Satz“, im Unterschied zu der von mir aus pragmatischen Gründen bevorzugten Verwendung, *auch* in Bezug auf mathematische Definitionen und Axiome und letztere hat er in BGM VII §6 im Sinn. Denn in Bezug auf die Einführung von *Axiomen* spielen, wie bereits hervorgehoben, *aus der Erfahrung gewonnene Brauchbarkeitskriterien* in der Tat eine Rolle. Dass sich „viel Erfahrung leicht nach ihnen darstellen“ lässt, macht sie zu „*guten* grammatischen Sätze“. Aber selbst hier gilt: Wenn Axiome als Regeln der Darstellung nicht viel taugen, macht sie das zu *schlechten* grammatischen und nicht zu falschen empirischen Sätzen. Der normative Charakter mathematischer Regeln wird also durch BGM VII §6 nicht tangiert und das Gültigkeitskriterium *mathematischer Sätze* (hier jetzt wieder in meinem Sinne zu verstehen) schon gar nicht.[11]

7.2.4 Zwischenresumée

Fassen wir nun kurz die bis hierhin wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels zusammen:

Steiners grammatische Bemerkung – dass Regeln als solche nicht falsifiziert werden können – ist richtig, reicht aber nicht aus, um zu erklären, warum der Regelstatus mathematischer Sätze *selbst* von em-

[11] Für eine alternative Deutung von BGM VII §6, die sich nicht auf die unveröffentlichte Nachlasspassage stützt, aber, wenn ich sie richtig verstanden habe, den normativen Charakter mathematischer Sätze hier ebenfalls nicht tangiert sieht, s. Mühlhölzer 2008, S.147.

pirischen Gegebenheiten unabhängig ist. Diese Unabhängigkeit kann – wie eben dargestellt – über das für die Mathematik charakteristische Beweisverfahren erklärt werden.

Ich habe zwar dafür argumentiert, dass die Königsamt-Analogie (BGM VII §3) diese Erklärung nahelegt. Trotzdem findet sich die Erklärung nicht direkt so bei Wittgenstein. Es würde daher zu weit gehen, sie als *seine* Erklärung zu bezeichnen. Man kann sie aber in zweierlei Hinsicht durchaus als eine *Wittgensteinianische* Antwort verstehen. Einerseits beschreibt sie (im Gegensatz zur diskutierten Alternative) die tatsächliche mathematische Praxis und folgt darin Wittgensteins methodologischem Anspruch bei der philosophischen Betrachtung der Mathematik (vgl. PU §124) und andererseits steht sie im Einklang mit einschlägigen Passagen aus seinem *Nachlass*.

Nach der alternativen Interpretation vertritt Wittgenstein eine Position, gemäß der die in mathematischen Sätzen ausgedrückten Regeln unter bestimmten Voraussetzungen durch empirische Erfahrungen ihre Gültigkeit verlieren können. Da, wie ich argumentiert habe, die Frage nach der Gültigkeit mathematischer Sätze einzig im Rekurs auf Beweise zu klären ist und da diese selbst keine empirischen Argumente zulassen, ist eine solche Position nicht ohne Weiteres mit der Methode mathematischer Forschung in Einklang zu bringen. Sie würde deshalb nicht nur den oben benannten methodologischen Selbstanspruch Wittgensteins verfehlen, sondern wäre auch aus systematischer Sicht nicht überzeugend. Nach meiner Interpretation stellen sich diese systematischen Schwierigkeiten für Wittgenstein hingegen nicht.

7.3 Wie weit reicht der Einfluss der Empirie?

Bisher offen geblieben ist die Frage, inwieweit der *Inhalt* der Mathematik nun tatsächlich von der Empirie beeinflusst ist. Wie bereits betont, sind unsere Möglichkeiten mathematische Regeln zu bilden durch unsere artspezifischen kognitiven Möglichkeiten beschränkt und insofern unterliegen unsere mathematischen Regeln trivialerweise empirisch bedingten Grenzen – das gilt für all unsere kognitiven Leistungen. Darüber hinaus haben wir gesehen, dass die Aspekte der Anwendbarkeit und Bewährung mindestens eine entscheidende Rolle in der Entwicklung der *Arithmetik* gespielt haben. Mathematische Regeln dürfen bei Wittgenstein also nicht als willkürliche Setzungen gelesen werden und ihre Anwendbarkeit in der Beschreibung von Natur ist keinesfalls Zufall.

7.3.1 Empirie bestimmt, welche Regeln möglich sind? (Steiners Interpretation)

Laut Steiner (2009) gelangt der späte Wittgenstein – Steiner bezieht sich damit auf *BGM* und *LFM* – aber zu einer noch viel weitergehenden Überzeugung. Danach *bestimmen* die Gegebenheiten der Welt, *welche* mathematischen Regeln wir überhaupt aufstellen *können*. Zwar sind wir diejenigen, die die Sätze, die „empirische Regularitäten" ausdrücken, zu mathematischen Regeln „verhärten" und ihnen so ihre Normativität – und damit ihre Notwendigkeit – verleihen (vgl. Steiner 2009, S.1-2); welche mathematischen Regeln überhaupt möglich sind, wird aber durch diese Regularitäten festgelegt – also empirisch.

Die Situation stellt sich nach Steiner wie folgt dar: Regularitäten in der physikalischen Welt führen zu einem gleichförmigen menschlichen Verhalten. Dieses Verhalten wiederum nehmen wir zum Anlass, die Regularität zur Regel zu erklären: Das was zunächst meistens der Fall ist, so dass Abweichungen als Ausnahmen angesprochen werden können, erklären wir nun für „richtig" und Abweichungen für „falsch". Dabei geht er davon aus, dass unser Verhalten im ersten Schritt durch die zugrunde liegenden physikalischen Regularitäten völlig festgelegt ist: „Mathematical theorems [...] are 'dependent on experience'. [They] are rules which are 'supervenient'[12] on experience" und folglich „the only rules available" (Ibid., S.10, 12).

Gegen diese Interpretation Wittgensteins werde ich nun im Folgenden argumentieren.

[12] Steiner sagt nichts dazu, wie er den Begriff ‚Supervenienz', der in philosophischen Debatten ja durchaus auf verschiedene Weisen definiert wird, hier verwendet. Der Text legt allerdings nahe, dass er damit, im üblichen Sinne, meint: Verschiedene Erfahrungen können zum gleichen mathematischen Satz führen, aber abweichende Sätze kann es nicht bei gleicher Erfahrung geben.

7.3.2 Inhalt der Mathematik wird von empirischen Gegebenheiten angeleitet und begrenzt, aber nicht vorherbestimmt

Seine Interpretation des späten Wittgenstein findet Steiner vor allem durch zwei Punkte bestätigt. Der erste ist der folgende:

1. Während Wittgenstein noch in den *Philosophischen Bemerkungen* davon ausgeht, dass es nicht „zwei unabhängige Beweise eines mathematischen Satzes geben" kann (PB S.184), erklärt er in den *BGM*, dass es „natürlich Unsinn [wäre] zu sagen, dass *ein* Satz nicht mehrere Beweise haben kann" (BGM III §58).

Laut Steiner würde seine Interpretation hier eine Erklärung bieten. Wenn mathematische Sätze als zur Regel verhärtete Regularitäten auf physikalischen Tatsachen basieren, liefern diese Regularitäten eine Möglichkeit „to identify a mathematical proposition independently of its proof" (Steiner 2009, S.3). Es wäre dann möglich, einen mathematischen Satz unabhängig von seinem Beweis als mathematischen Satz anzusprechen und über diesen Satz zu sagen, dass er mehr als einen Beweis haben kann.

Zunächst einmal äußert sich Wittgenstein in den *BGM* zur Frage, ob man denselben Satz auf verschiedene Weise beweisen kann, keinesfalls so eindeutig, wie es bei Steiner hier den Eindruck macht. In BGM III §58 fügt Wittgenstein zur Begründung unmittelbar an: „– denn so sagen wir eben". Damit erkennt er hier einfach ein Faktum der mathematischen Praxis an, die er in seiner Philosophie der Mathematik ja nachdrücklich berücksichtigen will (PU §124). Eine Begründung, *warum* wir so reden, bleibt er allerdings schuldig. Und dies ist ja gerade die interessante Frage. Tatsächlich ringt Wittgenstein in *BGM + Nachlass* beständig mit der Frage, ob ein mathematischer Satz unabhängig von seinem Beweis identifiziert werden kann, ohne allerdings die These, dass der Sinn eines mathematischen Satzes in entscheidender Weise von dessen Beweis (mit-)bestimmt wird, je gänzlich aufzugeben, wie ich im nächsten Kapitel zeigen werde.

Trotzdem gibt es keinen Zweifel daran, dass Steiner hier ein zentrales Problem in Wittgensteins später Philosophie der Mathematik benennt – ein ähnliches Problem stellt sich u.a. ja auch in Bezug auf die Verständlichkeit mathematischer Vermutungen (vgl. 3.2.2). Und ferner ist es richtig, dass Wittgenstein in seinen späten Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik den engen Zusammenhang zwischen Beweis und Sinn zunehmend aufweicht. Falls dieses Umdenken tatsächlich auf Steiners Weise zu erklären ist, so lässt uns Wittgenstein das aber nicht wissen.

Was Steiners Lösung für das Identitätsproblem mathematischer Sätze anbelangt, so ist zunächst festzuhalten, dass sie keinesfalls alternativlos ist. So hat beispielsweise Esther Ramharter (2015) kürzlich einen Ansatz über die Betrachtung der in den Sätzen vorkommenden Teilformeln vorgeschlagen.[13] Ferner erscheint es mir naheliegender, die Entwicklung in Wittgensteins Auffassung vom Zusammenhang zwischen Beweis und Satz mit der grundlegenden Änderung seiner Bedeutungsauffassung von seiner verifikationistischen mittleren Phase zur Gebrauchsauffassung in den *Philosophischen Untersuchungen* in Verbindung zu bringen als mit seiner Diskussion der Relevanz der empirischen Gegebenheiten. Danach wäre es möglich, mathematische Sätze über ihre Verwendungsweisen zu identifizieren. Diese Überlegungen werde ich ebenfalls im nächsten Kapitel im Detail ausführen.

Vor allem aber bietet Steiners Lesart überhaupt nur scheinbar eine Lösung für das Identitätsproblem mathematischer Sätze. Wenn nämlich die Unabhängigkeit von Satz und Beweis darauf beruht, dass mathematische Sätze über die ihnen zugrunde liegenden physikalischen Regularitäten identifiziert werden können, macht das die Beweise zugleich überflüssig; zur Entdeckung dieser Regularitäten genügte schließlich die Beobachtung.

Steiner interpretiert Wittgensteins Beweis-Auffassung allerdings folgendermaßen: „The proofs themselves, however, together with the theorems, are drawn from experience.“; „a proof is a schematic picture of an experiment“ (Ibid., S.13, 15). Mein Einwand ist deshalb vielleicht vorschnell und Beobachtung und Beweis sind tatsächlich gar nicht so

[13]Dabei muss natürlich beachtet werden, dass, wie Wittgenstein in den *PU* zeigt, ein Verständnis der Satzkomponenten und der Art und Weise wie sie zusammengefügt sind noch nicht hinreichend ist, um den Satz zu verstehen (vgl. Glock 1996, S.231)

verschieden, wie es scheint. Die Experimente, von denen Wittgenstein spricht, sind aber selten von der Gestalt, dass, wie im Eingangsbeispiel, Bohnen zusammengeworfen werden. Meist bestehen sie vielmehr darin zu beobachten, welche Ergebnisse Menschen herausbringen, wenn sie mathematische Regeln auf mathematische Terme anwenden. So ist zum Beispiel an der Stelle, an der Wittgenstein tatsächlich von der „Verhärtung eines Erfahrungssatzes in eine mathematische Regel" spricht, von dem Erfahrungssatz die Rede, „daß wir von 449 zu 450 kommen, wenn es uns vorkommt, wir hätten die Operation +1 auf 449 angewandt" (BGM VI §22). Es braucht also keine *physikalischen* Regularitäten, um Wittgensteins einschlägige Bemerkungen zu verstehen, sondern psychologische.

Das führt direkt zum zweiten wesentlichen und ebenfalls problematischen Punkt in Steiners Interpretation. Er verweist darauf,

2. dass es in den *BGM* und *LFM* zahlreiche Stellen gibt, an denen Wittgenstein auf die für das Rechnen charakteristische große Übereinstimmung in den Handlungen und Ergebnissen hinweist.

Wie ich im vorhergehenden Kapitel dargestellt habe, ist Übereinstimmung in der Handlungsweise bei Wittgenstein aber eine Voraussetzung für das Regelfolgen im Allgemeinen und folglich *allein schon deshalb* auch für die Etablierung mathematischer Regeln. Regelfolgen setzt weitgehende Übereinstimmung in Urteilen und Handlungsweisen voraus – nicht in dem konstitutiven Sinne, dass das korrekt ist, was von der Mehrheit so als korrekt angesehen wird, Fragen der Korrektheit müssen im Rekurs auf die Regel selbst geklärt werden –, aber in dem Sinn, dass das Regelfolgen unmöglich wäre, gäbe es keine solche Übereinstimmung (PU §241; vgl. 6.5.1).

Daraus folgt aber keinesfalls (und damit stimmt auch Steiner überein), dass allen Regeln physikalische Regularitäten zugrunde liegen. Steiners Interpretation hängt also maßgeblich von seiner These ab, dass in Bezug auf *mathematische* Regeln gilt: „These regularities in behavior presuppose, in turn, physical regularities." (Steiner 2009, S.22, vgl. auch S.15)

Ist diese These haltbar? Wie in 7.2.1 dargelegt, lässt sich aus Stellen wie dem eingangs diskutierten Bohnen-Beispiel lediglich schließen, dass aus Wittgensteins Sicht bei der Entwicklung der *Arithmetik* Erfahrungen mit festen Körpern eine wichtige Rolle gespielt haben.[14] Meiner Einschätzung nach finden sich in Wittgensteins Bemerkungen weder ausreichende Hinweise darauf, dass dies auch für alle anderen Teile der Mathematik gilt – Wittgenstein spricht in den einschlägigen Beispielen meist explizit von *Arithmetik*, bzw. benutzt arithmetische Beispiele und betont bekanntermaßen die „Buntheit" gegenüber der Einheitlichkeit der Mathematik (BGM III §46), noch legen die Bemerkungen nahe, dass die relevanten physikalischen Regularitäten *nur auf eine Weise* beschrieben werden können. Denn dass Menschen einheitlich ein bestimmtes Set von mathematischen Regeln zur Beschreibung bestimmter physikalischer Regularitäten verwenden, heißt nicht, dass nicht ein findiger Mensch ein anderes solches Set entwickeln und/oder vorschlagen könnte, das dann gemeinhin adaptiert wird – die Geschichte der Naturwissenschaften zeugt sogar von zahlreichen Beispielen dieser Art. Damit ist Supervenienz (s.o.) nicht gegeben.

Vielmehr ist Steiners These inkompatibel mit zwei anderen Erwägungen aus den *BGM*, nämlich (i) mit der These, dass der „Mathematiker [...] ein Erfinder [ist], kein Entdecker" (BGM I §168, vgl. auch I Anhang II §2) und (ii) mit der Überlegung, dass die Mathematik erst bestimme, was wir Tatsachen nennen: „Warum soll [die Mathematik] nicht, statt uns ‚Tatsachen zu lehren', die Formen dessen schaffen, was wir Tatsachen nennen?" (BGM VII §18)

[14] Worin diese Rolle genau besteht, ist sicherlich eine sehr interessante Frage. Wie in 7.2.3 erwähnt, ist es zunächst historisch richtig, dass sich die Arithmetik aus solchen empirischen Experimenten mit Zahlen und Gegenständen etc. entwickelt hat.

Ist eine solche Entwicklung aber auch denknotwendig? In einer Hinsicht sicherlich nicht. Es ist natürlich möglich Regelsysteme ohne praktische Anwendung zu erfinden, wie das Beispiel des Schachspielens zeigt. Andererseits ist die Mathematik aber eben kein Spiel, sondern eine Wissenschaft, die Darstellungsinstrumente für außermathematische Zwecke liefert (vgl. Eingangszitat). In dieser Hinsicht ist eine solche Entwicklung zumindest weitaus naheliegender und zweckdienlicher als eine von empirischen Gegebenheiten losgelöste, die dann eventuell zufällig zu brauchbaren Darstellungsinstrumenten führt.

Zunächst zu der Erfinderthese (i): Für Steiner besteht die einzige Freiheit darin, die *vorgefundenen* Regularitäten nicht zu Regeln zu verhärten. Er schreibt dazu: „The only degree of freedom is to avoid laying down these rules [i.e. the only rules available], not to adopt alternative rules. It is only in this sense that the mathematician is an inventor, not a discoverer." (Steiner 2009, S.12)

Dass die Natur keinen physischen Zwang auf uns ausübt, Regeln anzunehmen (allgemeine Fragen des Determinismus einmal ausgeklammert), wir also in dieser Hinsicht „frei" sind, kann wahrscheinlich als ein ziemlich unstrittiger Punkt gelten. Es leuchtet allerdings nicht ein, weshalb diese Möglichkeit der Annahme-Verweigerung Wittgenstein veranlasst haben sollte, die Tätigkeit des Mathematikers wiederholt als einen kreativen Akt des „Erfindens" zu beschreiben. Nach Steiners Interpretation wäre „Entdecken" die näherliegende Tätigkeitsbeschreibung. Und so schreibt er selbst auch an anderer Stelle bezeichnenderweise: „Once the appropriate empirical regularities are *discovered*, the apparent 'freedom' to extend mathematics any which way vanishes." (Ibid., S.13, meine Hvbg.)

Zum Verhältnis von Mathematik und Tatsachen (ii): Davon zu sprechen, dass die Mathematik „die Formen dessen schafft, was wir Tatsachen nennen", erscheint Steiner unproblematisch. Gemäß seiner Interpretation ist ja die Mathematik ihrerseits von den Tatsachen bestimmt: „the internal relationship between the regularities and the rules makes it impossible to think of an 'alternative arithmetic'" (Ibid., S.12). Wie aus dem Kontext von Wittgensteins entsprechender Bemerkung hervorgeht, will Wittgenstein genau dies aber bestreiten und deutlich machen, dass der sinnlogische Zusammenhang zwischen Mathematik und Empirie andersherum verläuft. Weiter oben in derselben Bemerkung heißt es nämlich:

> Wenn nun die Mathematik erst den *Charakter* dessen bestimmt, was du ‚Tatsache' nennst! ‚Es ist interessant zu wissen, *wieviele* Schwingungen dieser Ton hat.' Aber die Arithmetik hat dich diese Frage erst gelehrt. Sie hat dich gelehrt, diese Art von Tatsachen zu sehen. (BGM VII §18)

Hier wird hervorgehoben, dass mathematische Regeln sinnlogische Voraussetzungen für das Sprechen über bestimmte Tatsachen sind – in dieser Passage solche, in denen von Anzahlen die Rede ist. Sie liefern die Formen möglicher Beschreibungen von Tatsachen und sind so (mit-)bestimmend für „den *Charakter* dessen was wir ‚Tatsache' nennen". Salopp formuliert: Die Natur ist mathematisch, weil wir sie mit mathematischen Mitteln beschreiben. Hierzu passt auch Wittgensteins Beschreibung der Mathematik als Teil des „*apparatus* of language" und „*preparations* for a use of language" (LFM S.249-250; vgl. auch BGM V §40). Das schließt natürlich nicht aus, dass die empirischen Gegebenheiten bei der Entwicklung dieser mathematischen Beschreibungsformen eine pragmatische Rolle spielen *können*, indem sie die Zwecke dieser Entwicklung (mit-)bestimmen. Und es schließt ebenso wenig aus, dass diese Gegebenheiten eine begrenzende Rolle im Sinne einer anthropologischen Grenze spielen (vgl. dazu auch 6.5).

Auch folgendes von Steiner zitiertes Bild auf das Rechnen, das Wittgenstein in den *LFM* entwirft, scheint tatsächlich besser zu der von mir favorisierten Alternative zu passen:

> It is like finding the best place to build a road across the moors. We may first send people across, and see which is the most natural way for them to go, and then build the road that way. (LFM X S.95)

Steiner interpretiert die beschriebene Tätigkeit als „building a road where there was already a path (i.e. a regularity)" (Steiner 2009, S.8). Seine Rückführung von Übereinstimmungen in den Handlungen auf physikalische Regularitäten veranlassen ihn hier also anzunehmen, der Pfad (d.h. die Regularität) der zur Straße (d.h. zur Regel) ausgebaut wird, sei zuvor schon da. Tatsächlich zeichnet sich die beschriebene Situation aber dadurch aus, dass sowohl der Pfad als auch dessen Ausbau zur Straße Resultate menschlicher Handlungen sind. Vorab gibt es nur Moor, unstrukturiertes Rohmaterial, das eben noch nicht von sich aus in mögliche Wege unterteilt ist. Weder gibt es nur eine ausgezeichnete Möglichkeit, noch wird hier unter verschiedenen vorgegebenen Möglichkeiten ausgewählt. Es handelt sich vielmehr um eine Situation des von menschlichen Zwecken (Wird z.B. eine möglichst kurzer oder ein möglichst trockener Weg gesucht? Oder einer, der an besonders schönen Moorblumen vorbeiführt?) geleiteten Herstellens. Es sind die handelnden Akteure, die hier einteilen, Entscheidungen treffen und Präferenzierungen vornehmen und dabei auch ganz anders vorgehen könnten. Ferner legt die Analogie auch nicht nahe, dass aus einer Gleichförmigkeit im Verhalten gefolgert werden könnte, dass der richtige Weg gefunden wurde. Es ist durchaus denkbar, dass ein findiger Mensch einen noch besseren Pfad nimmt und ihm daraufhin alle folgen (der alte Weg würde immer noch bestehen – kontra Nützlichkeit bestimmt Gültigkeit bei Weiberg). Die Moor-Analogie legt also nahe, dass Übereinstimmung notwendig ist, um eine Regel zu etablieren, aber nicht, dass diese Übereinstimmung vorab physikalisch bestimmt und alternativlos wäre.

Während Steiner also behauptet, dass mathematische Sätze aus der Natur gewonnen (und dann zu Regeln erklärt) werden, werden nach meiner Interpretation *mittels* mathematischer Regeln Beschreibungen der Natur gewonnen. Anders als Steiners Interpretation ließe diese Interpretation auch die Möglichkeit von nicht-kanonischen Anwendungen zu – wie in Wittgensteins Beispiel, wo die Arithmetik, deren kanonische Anwendung[15] sicherlich das Quantifizieren fester Körper ist, plötzlich auf Töne angewendet wird. Sie eröffnet so auch einen Weg, ein Phänomen zu erklären, dass in einem offenkundigen (und von Steiner auch zugestandenen) Widerspruch zu der von ihm als Interpretation favorisierten Position steht, nämlich solche Mathematik, die zunächst noch keine (außermathematische) Anwendung hat, die aber in manchen Fällen zu einem späteren Zeitpunkt z.B. für die Physik interessant wird. Steiners Interpretation weist also nicht nur erhebliche exegetische Schwierigkeiten auf, sondern unterstellt Wittgenstein ferner eine Position, die aus systematischer Sicht nicht haltbar ist, weil sie im Widerspruch zu bekannten mathematischen Phänomenen steht. Meine Interpretation trifft dieser Einwand hingegen nicht.

[15] Ich verwende die Begriffe kanonische und nicht-kanonische Anwendung hier im Sinne von Steiner 2005; dort finden sich ferner interessante weitere Beispiele für kanonischen und nicht-kanonischen Anwendungen von Mathematik.

Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide erweisen ihn für uns als ein passendes Instrument zum gleichen Zweck.

L. Wittgenstein
(BGM VII §10)

Kapitel 8

Sinn und Beweis mathematischer Sätze

– warum Wittgenstein in seiner Spätphilosophie die Idee hätte aufgeben sollen, dass der Sinn eines mathematischen Satzes durch dessen Beweis bestimmt ist

Wie in der Einleitung bemerkt, gibt es insbesondere in der Darstellung mathematischer Beweise einige Baustellen in Wittgensteins *Nachlass* (3.2.2). Besonders problematisch erscheint in diesem Zusammenhang Wittgensteins Behauptung, der Sinn eines mathematischen Satzes sei durch dessen Beweis bestimmt.

In diesem Kapitel werde ich zunächst Wittgensteins These, die mit ihr verbundenen Probleme und Wittgensteins Lösungsansätze darstellen. Dabei wird sich zeigen, dass sich in *BGM + Nachlass* keine vollständig zufriedenstellende Lösung dieser Probleme findet. Sodann werde ich einen eigenen, von Wittgenstein inspirierten Vorschlag zur Lösung machen. Dieser Vorschlag basiert auf einer geeigneten Unterscheidung zwischen den Fähigkeiten zur Rechtfertigung und zur Anwendung mathematischer Sätze und stützt sich wesentlich auf Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung aus den *Philosophischen Untersuchungen*. Eine ausführlicher Darstellung meines Vorgehens in diesem Kapitel findet sich in 8.1.4. Als Erstes werde ich jedoch genauer in die Problemlage einführen.

8.1 Problemstellung

Im Folgenden werde ich zunächst, die verschiedenen Varianten von Wittgensteins strittiger These über den Zusammenhang zwischen Satz und Beweis darstellen, die sich im *Nachlass* finden und anschließend einen Überblick über die damit verbundenen Probleme geben.

8.1.1 Der Zusammenhang zwischen Sinn und Beweis bei Wittgenstein

Die Idee, dass der Sinn eines mathematischen Satzes aufs engste mit seinem Beweis zusammen hängt, zieht sich, im Laufe der Zeit verschiedentlich gefasst durch Wittgensteins gesamten *Nachlass*.

In der mittleren Phase entspringt dieser Zusammenhang zunächst der verifikationistischen Grundauffassung,[1] an der sich Wittgensteins Denken in dieser Zeit orientiert: „Der Sinn eines Satzes ist die Methode seiner Verifikation." (WWK S.79)

In Bezug auf Mathematik folgt aus diesem *Verifikationismus*:[2]

(SdBM)[3] Der Sinn eines mathematischen Satzes wird durch die Methode bestimmt, nach der er bewiesen werden kann.

Dies hält Wittgenstein an verschiedenen Stelle in den *Philosophischen Bemerkungen* und der *Philosophischen Grammatik* so fest, u.a. hier: „Die *Methode* der Kontrolle der Wahrheit entspricht dem Sinn des mathematischen Satzes"(PG S.366); „›Jeder Satz sagt, was der Fall ist, wenn er wahr ist.‹ Und dieses ›was der Fall ist‹ muß sich beim mathematischen Satz auf die *Art und Weise* seines Beweises beziehen." (PB S.170, meine Hvbg.); „Die Verifikation ist nicht *ein* Anzeichen der Wahrheit, sondern *der* Sinn des Satzes. (Einstein: Wie eine Größe

[1] Frascolla (1994) hält dies für das definierende Merkmal von Wittgensteins mittlerer Phase (die er von 1929 bis 1934 datiert). Diese Überzeugung teilt Potter (2011, S.127). Mühlhölzer widerspricht Frascolla darin allerdings (Mühlhölzer 2010, S.17 fn.13).

Daran, dass Wittgenstein in dieser Zeit verifikationistische Gedanken zumindest *erwogen* hat, scheint mir aber wenigstens kein Zweifel zu bestehen.

[2] Siehe dazu insbesondere Frascolla 1994, S.111-128; vgl. auch Marion 1998, S.159ff..

[3] Das Kürzel „SdBM" steht für „Sinn durch Beweismethode", entsprechend das nachfolgende „SdB" für „Sinn durch Beweis".

gemessen wird, das ist sie.)“ (PB S.200).[4]

Zur Zeit, in der das in den *BGM* veröffentlichte Material entstanden ist, hatte Wittgenstein die Unterscheidung zwischen Beweis*methode* und *tatsächlichem Beweis* fallen gelassen.

Was ihn dazu bewogen hat, ist umstritten. Frascolla (1994, S.119ff.) und Potter (2011), die Wittgensteins Regelfolge-Überlegungen als Regelskeptizismus interpretieren (vgl. 6.3.3), machen diese dafür verantwortlich: Die skeptische Einsicht unterminiert die Möglichkeit allgemeiner Lösungsverfahren, weshalb die Unterscheidung aufgegeben werden muss. Da die skeptische Interpretation, wie in 6.3.3 gezeigt wurde, falsch ist, kann dies jedoch nicht die Erklärung sein. Und das ist auch besser so, möchte man mit Blick auf die mathematischen Praxis anfügen. Selbstverständlich gibt es in der Mathematik allgemeine Lösungsverfahren, die in einer beliebigen Anzahl von Fällen angewandt werden können. Zwar gibt es für *die meisten*, oder zumindest für *alle interessanten* Satzkandidaten in der Tat kein etabliertes algorithmisches Verfahren, dass man einfach abarbeiten könnte. Die typische Arbeit eines Mathematikers besteht nicht darin, bekannte Algorithmen auf neue Satzkandidaten anzuwenden, sondern überhaupt erst Wege zu finden,[5] wie sich ein Kandidat beweisen (im engen Sinn von beweisen) lässt (vgl. 5.2). Und wenn ein solcher Weg gefunden ist, ist damit in der Regel (mit Ausnahme von Beweisen vom Typ III, deren beweisender Teil vom Typ I ist) auch schon ein Beweis gefunden. Aber trotzdem *gibt* es natürlich Beweise vom Typ I.

Es fällt allerdings in der Tat auf, dass algorithmische Verfahren zum Beweis mathematischer Sätze in *BGM + Nachlass* so gut wie keine Rolle mehr spielen, obwohl es sich bei den am häufigsten diskutierten Bei-

[4] Mir ist bewusst, dass Wittgenstein an diesen verschiedenen Stellen nicht ganz das gleiche behauptet. Insbesondere wird der Sinn einmal mit der Beweismethode identifiziert (PB S.170, 200), während er ihr an anderer Stelle „entspricht“ (PG S.366). Daraus scheint mir aber in beiden Fällen zu folgen, dass der Sinn durch die Beweismethode *bestimmt* ist.

Da es mir in diesem Kapitel nicht um eine Exegese des mittleren Wittgenstein geht, sondern um eine systematische Evaluation des Zusammenhang zwischen Satz und Beweis beim späten Wittgenstein, werde ich es, hier und bei gelegentlicher Erwähnung des mittleren Wittgenstein im Folgenden, bei einer eher groben Skizze von dessen Position belassen.

[5] „Finden“ ist hier nicht im Sinne von „Auffinden“ zu verstehen.

spielen mathematischer Sätze nach wie vor um einfache arithmetische Gleichungen handelt. Dies ist möglicherweise einfach darauf zurück zu führen, dass nun andere Aspekte im Fokus von Wittgensteins Interesses stehen. Sollte es aber doch etwas damit zu tun haben, dass er die Möglichkeit algorithmischer Lösungsverfahren verneint, läge er damit falsch.

Wittgenstein argumentiert jedenfalls später allgemein für die These, dass wir, wenn wir einen *Weg* beschreiben, wie sich ein mathematischer Satz beweisen lässt, damit *zugleich* einen *Beweis* für diesen Satz beschreiben – im Gegensatz zum Fall empirischer Sätze, für die wir ein Weg angeben können, wie sie sich verifizieren (oder falsifizieren) lassen, ohne sie damit schon verifiziert zu haben (LFM p.64, MS 163 S.54-55; Glock 1996, S.227; Baker & Hacker 2009, S.347; vgl. auch Wittgensteins zahlreiche Bemerkungen zum Unterschied zwischen mathematischen Beweisen und empirischen Experimenten). *In der Mathematik* fallen *Beweis* (Verifikation) und *Beweismethode* (Verifikationsmethode) damit zusammen. Diese These werde ich im Folgenden *Koinzidenzthese* nennen.

Eine Möglichkeit die Koinzidenzthese so zu verstehen, dass die Existenz von algorithmischen Lösungsverfahren damit nicht in Frage gestellt wird, wäre die folgende: Nehmen wir beispielsweise an, das Polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 12x + 42$ sei bisher nie durch das Polynom $g(x) = x^2 + 6$ geteilt worden. Dann kann man die Frage: „Wie lässt sich beweisen, dass sich $f(x)$ ohne Rest durch $g(x)$ teilen lässt?“ zwar dadurch beantworten, dass man das Verfahren der Polynomdivision beschreibt und dies wäre dann noch auf den konkreten Fall anzuwenden. Aber wenn man ganz konkret beschreiben soll, wie diese Division in diesem Fall aussieht, dann teilt man dabei $f(x)$ durch $g(x)$ (und erhält $x^2 - 2x + 7$). Für die Beschreibung *konkreter* Beweise ist die Koinzidenzthese also unabweisbar, nicht hingegen, wenn es darum geht, allgemeine Lösungsverfahren in Frage zu stellen.

Aus (i) Wittgensteins *Verifikationismus* (Der Sinn eines Satzes ist durch die Methode bestimmt, nach der er verifiziert werden kann.) und (ii) seiner *Koinzidenzthese* (Zu wissen, wie man einen mathematischen Satz beweist ist dasselbe, wie einen Beweis für ihn zu haben.) ergibt sich seine notorische These:

(SdB) Der Sinn eines mathematischen Satzes wird durch dessen Beweis bestimmt.

In dieser Variante findet man diese These, die ich im Folgenden als SdB-These bezeichnen werde, schon in *PG*: „[D]er *Beweis* [gehört] zum *Sinn* des bewiesenen Satzes [...], d.h. [er bestimmt] den Sinn“ (PG S.375, meine Hvbg.)

Und so wird sie in der Sekundärliteratur in der Regel auch in Bezug auf den *späten* Wittgenstein bzw. die *BGM* formuliert. So spricht beispielsweise Dummett von „Wittgenstein's insistence that the sense of a mathematical statement is determined by its proof“ (1959, S.343), Hacker von „Wittgenstein's asserting that the sense of a mathematical equation is determined by its proof“ (2009, S. 345 fn. 80, s. auch S.347), Glock, etwas vorsichtiger, von Wittgensteins „dogmatic assertion that grasping the sense of a mathematical proposition *involves* knowing how it can be proven“ (1996, S.231, meine Hvbg.) und Frascolla von „the thesis that the proof determines the sense of a question or a conjecture“ (1994, S.184 en.41).

Auch laut Säätelä gilt für den späten Wittgenstein: „A mathematical 'proposition' does not have a sense prior to its proof.“ (2011, S.173) und Mühlhölzer hält fest, dass, gemäß Wittgenstein, „die Beweise den Sätzen überhaupt erst ihren *Sinn verleihen*“ (2010, S.83). Beide weisen allerdings zu Recht darauf hin, dass Wittgenstein mit dieser These später durchaus hadert. Insbesondere Mühlhölzer weist im Anschluss sogleich darauf hin, dass sich diese These, wie auch Wittgenstein später bewusst ist, nicht konsequent durchhalten lässt. Sein Kommentar stellt Wittgenstein Gedanken diesbezüglich im Teil III der *BGM* äußerst differenziert dar (s. Mühlhölzer 2010, Kapitel II.2, 3 und 6).

Tatsächlich ist Wittgenstein in den *BGM* allerdings vorsichtiger in seinen Formulierungen. Neben der Aufgabe der Unterscheidung zwischen Beweismethode und tatsächlichem Beweis formuliert er die SdB-These auch nicht mehr in dieser strikten Form. Die Textstellen in den *BGM*, die der Formulierung der SdB-These wohl am nächsten kommen, sind III §25 und V §42. In der ersten Passage warnt Wittgenstein davor, sich nicht davon täuschen zu lassen, dass das Resultat eines

Beweises in Satzform wieder gegeben wird. Er betont, „dass der *Sinn* des Resultates nicht *aus diesem allein*[6] abzulesen ist, sondern aus dem *Beweis*". In der zweiten erklärt Wittgenstein: „Das Problem, eine mathematische Entscheidung eines Theorems zu finden, könnte man mit gewissem Recht das Problem nennen, einer Formel mathematischen[7] Sinn zu geben." (BGM V §42)

Während also gemäß dem mittleren Wittgenstein der Beweis bzw. die Beweismethode den Sinn des bewiesenen Satzes vollständig *bestimmt*, scheint er später nur noch davon ausgegangen zu sein, dass der Beweis eines Satzes einen notwendigen, aber nicht hinreichenden Beitrag zum Sinn dieses Satzes leistet (BGM III §25, weitere Beispiel folgen im Verlauf).

Die folgende Formulierung vom Zusammenhang zwischen Sinn und Beweis beim *späten* Wittgenstein, wäre deshalb wohl treffender:

(SdB*) Der Beweis ist notwendig, um den Sinn des bewiesenen Satzes zu bestimmen.[8]

Da die SdB-These in der Sekundärliteratur zu und der systematischen Evaluation von Wittgensteins später Philosophie der Mathematik, wie oben dargestellt, gleichwohl eine zentrale Rolle spielt, erscheint es mir dennoch wichtig diese in die nachfolgenden Betrachtungen mit einzubeziehen. An Stellen, an denen ich Aussagen mache, die sowohl auf die strikte SdB- als auch auf die moderatere SdB*-These zutreffen, werde ich im Folgenden oft abkürzend SdB$^{(*)}$-These schreiben.

8.1.2 Inkompatibilitäten zwischen SdB-These und mathematischer Praxis

Sowohl die starke als auch die moderate Variante der SdB-These sind natürlich klärungsbedürftig. Wie soll diese Sinnbestimmung durch den Beweis genau von statten gehen? Wenn die moderaten Variante der SdB-These gilt, welche anderen Komponenten tragen dann zum Sinn des Satzes bei? Und in welchem Verhältnis stehen diese verschiede-

[6] Meine Hvbg.
[7] Auf diese Einschränkung werde ich im Folgenden noch zu sprechen kommen.
[8] Das entspricht in etwa Glocks Formulierung s.o.

nen Komponenten zu einander? Unmittelbar klar ist jedoch, dass die SdB-These in ihrer starken Formulierung im Widerspruch und in der schwächeren Formulierung (SdB*) zumindest in einer gewissen Spannung zu bestimmten Aspekten der mathematischen Praxis steht:

- *Unser anscheinendes Verständnis von mathematischen Vermutungen (aVV):* So ziemlich jede Mathematikerin würde behaupten *mathematische Vermutungen* (und auch offene Probleme), wie etwa die bekannten von Riemann („Alle nichttrivialen Nullstellen der Zeta-Funktion besitzen Realteil $\frac{1}{2}$.“) und von Goldbach („Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.“) zu verstehen. Im Fall der letzteren, gilt das vermutlich sogar für die meisten mathematischen Laien. Selbstverständlich liegt aber derzeit noch kein Beweis für diese Vermutung vor, so dass sie gemäß SdB-These keinen Sinn hätten.

- *Unser Verständnis von Axiomen und Definitionen (VAD)*: Mathematikerinnen sind offensichtlich in der Lage, mathematische Axiome und Definitionen zu verstehen. Es scheint also keinesfalls grundsätzlich ausgeschlossen zu sein, dass man mathematische Wort-Symbol-Ketten auch ohne Beweis verstehen kann. Dieser Punkt gewinnt zusätzlich dadurch an Brisanz, dass dieselbe Wort-Symbol-Kette in verschiedenen Zusammenhängen sogar einmal als Axiom (also ohne Beweis verständlich) und einmal als Theorem (also Resultat eines Beweises und damit erst durch diesen verständlich) fungieren kann.

- *Ein Satz, verschiedene Beweise (eSvB):* In der Mathematik werden verschiedenen Beweise[9] als Beweis für denselben Satz akzeptiert. Wie ist es möglich, denselben Sinn auf zwei verschiedene Weisen zu bestimmen? Oder ist es streng genommen sogar falsch, in solchen Fällen vom „selben Satz“ zu sprechen?

- *Erkennen als Beweis für Vermutung (EaBfV):* Mathematikerinnen zögern in der Regel nicht, einen Beweis als einen Beweis für

[9]Damit meine nicht, dass sie sich lediglich in der Notation oder in der Anzahl und Ausführlichkeit der Schritte unterscheiden, sondern, dass sie *wesentlich* verschieden sind, sich also in der Beweisidee unterscheiden.

die Vermutung XY zu klassifizieren. Wie ist das möglich, wenn der Sinn dieser Vermutung erst im Beweis erst hergestellt, oder zumindest „vervollständigt wird“ wird?

- *Verwendung ohne Beweis (VoB):* Anwenderinnen der Mathematik, wie z.B. Naturwissenschaftlerinnen, Wirtschaftswissenschaftlerinnen oder Ingenieurinnen, sind sehr wohl in der Lage, einen mathematischen Satz korrekt anzuwenden, ohne seinen Beweis zu kennen und damit gemäß der SdB-These ohne seinen Beweis zu verstehen. Und selbst innerhalb der Mathematik verwenden Mathematikerinnen Sätze zum Beweis von anderen Sätzen, ohne erstere selbst bewiesen, oder den Beweis vorher genau nachvollzogen zu haben.

Die oben aufgelisteten Phänomene legen nahe, dass wir zumindest über ein gewisses Verständnis (i) von Sätzen unabhängig von ihrem/ihren Beweis/en und (ii) von Satzkandidaten verfügen. Insbesondere *unser Verständnis von Axiomen und Definitionen* und die *Verwendung ohne Beweis* werfen die Frage auf, ob das Vorliegen eines Beweises tatsächlich *notwendig* für Verständnis eines mathematischen Satzes ist.

Anders als die SdB-These wäre die SdBM-These kompatibel mit den Phänomenen (aVV) und (EaBfV): Gemäß der SdBM-These ist der Sinn eines Satzes über die *Methode* bestimmt mittels derer der entsprechende Kandidat bewiesen (oder widerlegt) werden kann. Bisher unbewiesene bzw. unwiderlegte Kandidaten haben daher einen Sinn, solange es eine *etablierte Methode* gibt, mittels derer sie bewiesen bzw. widerlegt werden können. Um die Phänomene (VAD), (eSbB) und (VoB) erklären zu können bedürfte es allerdings ferner einer Unabhängigkeit von der Beweismethode. Die Beschränkung auf Kandidaten, für die es eine etablierte Beweismethode gibt, schließt ferner, wie bereits erwähnt, praktisch alle interessanten Fälle von mathematischen Problemen und Vermutungen aus. Mathematikerinnen würden Fragen wie die, ob sich das Polynom $f(x)$ aus unserem Beispiel oben ohne Rest durch das Polynom $g(x)$ teilen lässt, wohl kaum als „offenes Problem“ bezeichnen, oder gar Vermutungen darüber anstellen, was das Ergebnis dieser Division wäre.

Der mittlere Wittgenstein würde hier allerdings einwenden, dass die Mathematikerinnen damit die Grammatik des Wortes „Problem" ignorieren. Er insistiert, dass es nur dort Probleme geben kann, wo es auch eine Methode der Lösung gibt: „Wo man nicht suchen kann, da kann man auch nicht fragen, und das heißt: Wo es keine logische Methode des Findens gibt, da kann auch die Frage keinen Sinn haben" (PB S.172) Und daraus folgt für die Mathematik „Nur dort kann man in der Mathematik fragen (oder vermuten), wo die Antwort lautet: ›Ich muß es ausrechnen‹" (PB S.175)

Wittgenstein war sich bewusst, dass diese Auffassung ziemlich kontraintuitiv ist: „Würde denn aus dem allen nicht das Paradox folgen: daß es in der Mathematik keine schweren Probleme gibt, weil das, was schwer ist, kein Problem ist?" (PB S.176) Die Antwort, die er auf diese Frage gibt, ist allerdings ziemlich unbefriedigend. Er argumentiert, dass alle schwierigen Probleme in der Mathematik darin bestehen, erst, als „synthetischen" Arbeitsschritt, einen neuen Kalkül zu erfinden, innerhalb dessen sich *dann* das Problem stellen und „leicht" algorithmisch lösen lässt, was wiederum ein „analytischer Prozess" ist (PB S.176-77). Dies ist deshalb keine überzeugende Erklärung des Begriffs „schwieriges mathematisches Problem", weil solche „Probleme" bevor wir die eigentliche Arbeit geleistet, also den neuen Kalkül einführt haben, zwar schwierig sein mögen, aber nach Wittgensteins eigener Auffassung gerade keine Probleme sind. Und nachdem diese Arbeit geleistet ist und sie den Status „Problem" haben, sind sie nach vorgegebenem Schema leicht zu lösen.

Ferner beschränkt Wittgenstein seine Erklärung auf solche Beweise im engeren Sinn, nur auf solche Beweise vom Typ III, deren eigentlicher Beweisanteil Beweise vom Typ I sind, d.h. die darin bestehen einen neuen Kalkül einzuführen, innerhalb dessen der fragliche Kandidat dann algorithmisch beschrieben oder widerlegt werden kann. Er unterschlägt also weiterhin Beweise vom Typ II, die, wie in 5.2 erwähnt, eigentlich die typischen Beispiele mathematischer Beweise im Forschungsalltag einer Mathematikerin sind.

Wittgenstein weist zwar völlig zu Recht darauf hin, dass mathematische Probleme oder Fragen von einer gänzlich anderen Art sind als ihre empirischen Namensvettern. Solange man sich dieser Unterschiede aber bewusst ist, erscheint es unproblematisch, die Ausdrücke „offenes Problem“ und „Vermutung“ in der Mathematik so zu verwenden, wie Mathematiker dies tun (d.h. um sich auf für die Forschung interessante Satzkandidaten zu beziehen, die (noch) nicht bewiesen sind). Wittgensteins Beharren darauf, dass sich nicht fragen oder vermuten lässt, ob sich jede gerade Zahl größer zwei als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt, scheint mir mitunter eher Verwirrung zu stiften, als diese zu beseitigen.

In seinen späteren Bemerkungen, nach Aufgabe der Unterscheidung zwischen Beweis und Beweismethode, diskutiert Wittgenstein explizit die Phänomene (aVV), (eSvB) und (EaBfV) und entwickelt verschiedene Vorschläge, wie sie erklärt werden können. Auch das Phänomen (VoB) wird in *BGM + Nachlass*, zumindest was die außermathematischen Anwendungen mathematischer Sätze anbelangt, durchaus anerkannt, wenngleich Wittgenstein, wie ich im Folgenden noch ausführen werde, hier besonders ratlos ist. Das Phänomen der innermathematischen Anwendung mathematischer Sätze lässt er hingegen, soweit ich dies beurteilen kann, völlig außer Acht und zu (VAD) wäre mir auch keine einschlägige Nachlasspassage bekannt.

Die Diskussion in der Literatur betrifft ebenfalls hauptsächlich die Spannungen zwischen der SdB-These und den Phänomenen (aVV), (eSvB) und (EaBfV). Das Phänomen (VoB) wird in der Diskussion hingegen kaum beachtet – mit der Ausnahme von Mühlhölzers Kommentar (s. z.B. Mühlhölzer 2010, S.83). Das Phänomen (VAD) wird ebenfalls kaum berücksichtigt.

8.1.3 Die SdB$^{(*)}$-These und Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung

Ferner ergibt sich durch die SdB$^{(*)}$-These eine gewisse Spannung innerhalb von Wittgensteins Spätwerk: Die SdB$^{(*)}$-These scheint, zumindest prima facie, inkompatibel zu sein mit der Gebrauchsauffassung der Bedeutung, wie Wittgenstein sie in den *Philosophischen Untersuchungen* entwickelt.

Die Frage, wodurch der Sinn von Sätzen konstituiert wird, gehört ja zunächst typischerweise in die Sprachphilosophie. Und in seiner Spätphilosophie vertritt Wittgenstein hierzu eine dezidierte Position (vgl. Einleitung 1.1.2), die er insbesondere in den *PU* ausgearbeitet hat. Weder lernen wir im Allgemeinen die Bedeutung von Wörtern, indem wir lernen, worauf sie sich beziehen, noch ist uns der Sinn eines Satzes immer schon über die Bedeutungen seiner Teilausdrücke und derer Kombinationsweise gegeben. Die Bedeutung eines Wortes zu verstehen, heißt vielmehr, es adäquat verwenden zu können. Und einen Satz zu verstehen, heißt vielmehr zu wissen, welcher Zug mit ihm in einem speziellen Sprachspiel gemacht werden kann; d.h. welche Rolle bzw. Funktion er in bestimmten Sprachspielen hat. Letzteres mag oft ein Verständnis der Bedeutung der Satzkomponenten und ihrer Kombinationsweise voraussetzen, aber dies allein reicht nicht, um den Satz zu verstehen. Man muss ferner wissen, wie der Satz im jeweiligen Kontext seiner Äußerung verwendet wird. Die Art und Weise der Verifikation ist nur *ein Aspekt* des Gebrauchs. Und sobald man dies anerkennt, kann der Sinn eines Satzes auch über die diese *anderen Aspekte des Gebrauchs* erfasst werden.

Wie diese Gebrauchsauffassung vom Sinn von Sätzen im Allgemeinen zu der These passt, dass der Sinn *mathematischer Sätze* durch deren Beweis bestimmt ist, ist unklar: Ist der Sinn mathematischer Sätze gänzlich anders aufzufassen als derjenige von Sätzen der normalen Sprache? Oder gibt es irgendeinen Zusammenhang zwischen Beweis und Verwendung?

Diese Spannung hat ferner enge Verbindungen zu den oben aufgelisteten Problemen, insbesondere zu den wenig betrachteten (VAD) und (VoB). Glock bringt diesbezüglich das Problem genau auf den Punkt, wenn er schreibt:

> What Wittgenstein ignores is the straightforward point that a mathematician, unlike a toddler, understands Goldbach's conjecture in the sense of knowing how it would

> operate as a norm of representation, that is, he knows what it would be to accept it as an axiom, whether or not he knows how to prove it as a theorem. (Glock 1996, S.231)

Er arbeitet diese Kritik allerdings nicht weiter aus. Um das zu tun, muss man genau feststellen, *worin* das Spannungsverhältnis zwischen (i) der Gebrauchsauffassung, (ii) der SdB-These und (iii) der Aufgabe des Verifikationismus aus der mittleren Phase besteht, wie ich in 8.2 weiter ausführen werde.

Die Schwierigkeiten, die sich aus der Spannung zwischen SdB$^{(*)}$-These und Gebrauchsauffassung ergeben, werden von Wittgenstein selbst nur ansatzweise diskutiert[10] und von seinen Interpreten zumindest nicht *direkt* thematisiert oder gar völlig ignoriert (Baker & Hacker 2009, Kapitel VII.13). Auch Mühlhölzer (2010) sieht keine Spannung zwischen der SdB-These und der Gebrauchsauffassung,

Glock (s.o.) und Schroeder (2012, S.474) erwähnen die Spannung wenigstens indirekt. Aber eine direkte Auseinandersetzung mit dem Zusammenhang (oder Nicht-Zusammenhang) zwischen Wittgensteins Bedeutungsauffassung in den *PU* und der SdB$^{(*)}$-These gibt es erstaunlicherweise nicht.

8.1.4 Ziel und Vorgehen

Im Folgenden werde ich zunächst die Spannung zwischen diesen beiden Arten, den Sinn eines mathematischen Satzes zu bestimmen, untersuchen, die nach der obigen Überlegung *mindestens nicht ohne Weiteres* zueinander passen. Dabei werde ich wie folgt vorgehen: In Teil 8.2 werde ich zunächst Wittgensteins Möglichkeiten diskutieren, die (scheinbare) Spannung zwischen der SdB-These und der Gebrauchsauffassung der Bedeutung zu bestreiten oder zu beseitigen und dabei an der SdB$^{(*)}$-These festzuhalten. Es wird sich dabei zeigen, dass keiner dieser Wege funktioniert. Ferner werde ich anhand von Beispielen aus der mathematischen Praxis dafür argumentieren, dass die Verwendung

[10] Diese Diskussion werde ich in Abschnitt 8.3 erörtern.

mathematischer Sätze in nicht-mathematischen, aber auch in *mathematischen* Sprachspielen nahelegt, die SdB$^{(*)}$-These aufzugeben.

Im Teil 8.3 werde ich dann anhand entsprechender Passagen aus dem *Nachlass* darstellen, wie sich Wittgensteins Auffassung vom Zusammenhang zwischen Sinn und Beweis eines mathematischen Satzes im Laufe der Zeit deutlich wandelt. Je mehr er sich auf den tatsächlichen Gebrauch mathematischer Sätze konzentriert, desto weniger eng wird der Zusammenhang zwischen Sinn und Beweis dargestellt.

Obwohl Wittgenstein der SdB$^{(*)}$-These gegenüber immer skeptischer wurde und ihr an manchen Stellen sogar widerspricht, verabschiedet er sich nie gänzlich von ihr und arbeitet erst recht keine Alternative aus. Dies wurde jüngst auch hervorgehoben von Potter (2011), der behauptet, dass als Wittgenstein sich der mit der SdB-These verbunden Probleme bewusst wurde „the damage done to his account was too great to be easily repaired" (S.134). Er vermutet daher, dass Wittgensteins „failure" eine solche Alternative vorzulegen unausweichlich war (S.136).

In letzten Teilen des Kapitels (8.4, 8.5, 8.6) werde ich versuchen Potter dahingehend zu widerlegen.

Ich werde zwar dafür argumentieren, dass Wittgenstein die SdB$^{(*)}$-These hätte aufgeben sollen – so erklärt sich der Untertitel dieses Kapitels. Die Konsequenzen, die sich daraus für seine späte Philosophie der Mathematik ergeben, halte ich aber, kontra Potter, keineswegs für fatal.

Ganz im Gegenteil: Hätte Wittgenstein die SdB$^{(*)}$-These aufgegeben, stattdessen an der Gebrauchsauffassung der Bedeutung auch in Bezug auf *mathematische* Sätze konsequent festgehalten und ferner der *innermathematischen* Verwendung mathematischer Sätze angemessen Rechnung getragen, so hätte sich daraus eine weitaus zufriedenstellendere Auffassung von den Zusammenhängen zwischen Beweis, Sinn und Verwendung mathematischer Sätze ergeben. (Diese Lösung hat Wittgenstein gegen Ende seiner Beschäftigung mit Mathematik im Frühjahr 1944 *möglicherweise* sogar angedacht.)

Diese Alternative wäre offensichtlich kompatibel mit der Gebrauchsauffassung aus den *PU*. Ferner, so werde ich in 8.5 zeigen, ließe sich innerhalb dieser Alternative auch den aufgelisteten Phänomenen (8.1.2) aus der mathematischen Praxis ohne Weiteres Rechnung tragen.

8.2 Die SdB-These und die Gebrauchsauffassung der Bedeutung: Wittgensteins Optionen

Aus Wittgensteins Spätwerk ergibt sich folgende Spannung aus (i) der Gebrauchsauffassung, (ii) der SdB-These und (iii) der Aufgabe des Verifikationismus aus der mittleren Phase: Wenn sich (i) die *Gebrauchsauffassung* der Bedeutung auf *mathematische* Sätze *übertragen lässt*, wird der *Sinn* eines mathematischen Satzes über dessen *Verwendung* bestimmt. Gleichzeitig (ii) wird der Sinn eines mathematischen Satzes aber gemäß *SdB-These* durch seinen *Beweis* bestimmt, beziehungsweise der Beweis ist zumindest notwendig, um den Sinn des bewiesenen Satzes zu bestimmen (SdB*).

Wittgenstein distanziert sich (iii) in den *PU* insbesondere *explizit* von der *rein verifikationistischen* Bedeutungsauffassung, die er in seiner mittleren Phase erwogen hatte:

> Die Frage nach der Art und Möglichkeit der Verifikation eines Satzes ist *nur eine besondere Form* der Frage »Wie meinst du das?« Die Antwort ist *ein Beitrag* zur Grammatik des Satzes. (PU §353, meine Hvbg.)

Seine Verifikation/Verifikationsmethode *bestimmt* nun nicht mehr den Sinn eines Satzes, oder ist gar mit diesem identisch, aber sie leistet einen – hier nicht mal mehr als notwendig bezeichneten – „*Beitrag* zur Grammatik“. Immerhin wird der „Frage nach der Art und Möglichkeit der Verifikation eines Satzes“ in den relevanten Fällen aber auch gemäß der Gebrauchsauffassung eine Rolle in der Frage nach dem Sinn eines Satzes zugestanden. Wittgenstein gibt den Verifikationismus also nur insofern auf, dass er festhält, dass die Art und Weise der Verifikation nicht der *einzige* Aspekt des Sinns eines Satze ist.

Die Frage bleibt deshalb zunächst, ob dieser Aspekt der Art und

Weise der Verifikation, in Bezug auf *mathematische Sätze* (a) der *einzige* oder zumindest (b) *gerade essentiell* ist, so dass sich der Sinn ohne diesen Aspekt nicht konstituieren lässt.

Vorausgesetzt dass die Gebrauchsauffassung für Sätze der *normalen Sprache* nicht zur Disposition steht – und für Wittgenstein selbst steht sie sicherlich nicht zur Disposition[11] –, gibt es, soweit ich sehe, drei Optionen mit der Spannung zwischen (i), (ii) und (iii) umzugehen:

- Entweder muss man argumentieren, dass für den Sinn *mathematischer Sätze*, im Gegensatz zu Sätzen der normalen Sprache, (a) oder zumindest (b) der Fall ist.
- Oder man muss zeigen, dass auch die anderen Aspekte des Gebrauchs mathematischer Sätze notwendig mit ihrem Beweis zusammenhängen.
- Oder man muss die SdB$^{(*)}$-These doch fallen lassen.

Sofern Wittgenstein den Aspekt der Verwendung mathematischer Sätze überhaupt thematisiert, versucht er den zweiten Weg zu gehen 8.2.2. Bevor ich darauf eingehe, werde ich jedoch zunächst zeigen, dass, kontra (a), die Art und Weise der Verifikation *nicht* der einzige Aspekt des Gebrauchs mathematischer Sätze ist. In 8.2.2 werde ich dann ebenfalls gegen (b) argumentieren.

8.2.1 Die Verwendung mathematischer Sätze in *empirischen* und in *mathematischen* Sprachspielen

Obwohl mathematische Sätze selbst keine Behauptungen ausdrücken, sind wir, wenn wir sie *als mathematische Sätze* äußern, doch auf eine Behauptung verpflichtet, nämlich auf die Behauptung, dass diese Sätze wahr bzw. die in ihnen ausgedrückten Regeln gültig sind. Und das wiederum heißt, wir sind auf die Behauptung verpflichtet, dass sie sich

[11] Ich halte diese Auffassung für überzeugend, werde sie aber in diesem Rahmen nicht verteidigen.

beweisen lassen. Denn nur wenn sie einen Beweis haben, werden sie als gültige/wahre mathematische Sätze anerkannt.

Um einen mathematischen Satz gerechtfertigter Weise *als solchen* äußern zu können, muss man seine Gültigkeit/Wahrheit begründen können und in dieser Hinsicht wäre die Verwendung damit notwendig an die Kenntnis eines Beweises geknüpft.

Wenn man darin ferner die einzige Verwendung mathematischer Sätze sieht, folgt daraus gemäß Gebrauchsauffassung sofort die SdB-These und damit natürlich auch die Kompatibilität der beiden. Mit der zusätzlichen Unterscheidung zwischen Beweismethode und tatsächlichem Beweis entspricht diese Position der des mittleren Wittgenstein in seiner verifikationistischen Phase. Aus systematischer Sicht erscheint diese Prämisse jedoch höchst fraglich.

Diese Prämisse erscheint jedoch höchst fraglich.

Zunächst einmal ist es unklar, wie diese Auffassung der außermathematischen Verwendbarkeit mathematischer Sätze Rechnung tragen kann. Zumindest in diesem Fall, so scheint es, genügt es nicht, zu wissen, wie man die Gültigkeit des entsprechenden mathematischen Satz zeigen kann. In empirischen Sprachspielen fungieren mathematische Sätze als Normen der Darstellung /grammatische Sätze; sie drücken Regeln aus gemäß derer empirische Sätze transformiert oder vom Diskurs ausgeschlossen werden.

Man könnte vielleicht erwidern, dass dies der Auffassung nicht widerspricht. Wenn wir beispielsweise einen mathematischen Satz zur Transformation eines empirischen Satzes verwenden, rechtfertigen wir die Behauptung des transformierten Satzes u.a. damit, dass wir auf die Gültigkeit der Transformationsregel verweisen, die der entsprechende mathematische Satz ausdrückt. Und diese Gültigkeit muss wiederum, so könnte man argumentieren, durch den Beweis des Satzes gerechtfertigt werden. Aber diese Verwendung mathematischer Sätze in der Transformation von empirischen Sätzen setzt hier trotzdem mehr voraus als das Wissen, wie man ihre Gültigkeit beweist. Sie bedarf ferner der Fähigkeit, die entsprechenden empirischen Fakten als in dieser mathematischen Form beschreibbar zu erkennen, und der Fähigkeit, die richtigen Konsequenzen zu ziehen. Kurzum, um mathematische Sätze in empirischen Sprachspielen verwenden zu können, müssen wir sie nicht nur als gültige Regeln äußern, sondern vor allem als (grammatische) Regeln *verwenden* können.

Die Verwendung mathematischer Sätze in empirischen Sprachspielen beschränkt sich also keinesfalls darauf, sie als wahre Sätze bzw. gültige Regeln zu äußern.

Man könnte dagegen halten, dass der Gebrauch mathematischer Sätze innerhalb und außerhalb der Mathematik einfach zu zwei verschiedenen und voneinander unabhängigen Sprachspielen gehört. Dies würde zugleich eine Erklärung dafür liefern, warum Wittgenstein in BGM V §42 davon spricht, dass der Beweis dem bewiesenen Satz einen „*mathematischen* Sinn" gibt.

Dann könnte der Vorschlag zumindest die Kompatibilität der SdB-These und der Gebrauchsauffassung innerhalb der Mathematik erklären.

Aber auch dagegen gibt es Einwände. Tatsächlich *ähnelt* die Situation *innerhalb* der Mathematik nämlich derjenigen sehr, die ich soeben in Bezug auf die Verwendung mathematischer Sätze in *empirischen* Sprachspielen dargestellt habe.

Auch *innerhalb* der Mathematik werden mathematische Sätze (ebenso wie Axiome, Definitionen und logische Schlussregeln) als Transformations- und Exklusionsregeln verwendet, nämlich bei der Herleitung neuer Sätze. So kann der Satz des Pythagoras, um ein bekanntes Beispiel aus der Schulmathematik zu nennen, verwendet werden, um die fehlende Seitenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck auszurechnen (wenn die anderen beiden bekannt sind), oder um die Beziehung zwischen Katheten- und Hypotenusenlänge in einem beliebigen rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck zu bestimmen (Beweise in einem weiten Sinn), oder um (im engen Sinn) den Kosinussatz zu beweisen. Und diese innermathematischen Verwendungen setzen ebenfalls mehr Fähigkeiten voraus als nur begründen zu können, warum der Satz des Pythagoras wahr ist bzw. eine gültige mathematische Regel ausdrückt. Mathematische Sätze fungieren nicht nur außerhalb, sondern auch *innerhalb* der Mathematik als grammatische Regeln. Auch die innermathematische Verwendung mathematischer Sätze beschränkt sich daher nicht darauf, sie als wahre Sätze bzw. gültige Regeln zu äußern.

Aus systematischer Sicht scheidet Option (a) deshalb aus. Und Wittgenstein selbst gesteht in späteren Bemerkungen zu, dass wir mathematische Sätze, wenn auch vielleicht nicht unabhängig von, so doch zumindest ohne ihre Beweise verwenden:

> Wir haben uns im Beweis zu einer Entscheidung durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist die Erkenntnis nun frei vom Beweis (ist die Nabelschnur abgeschnitten)? – Nun, der Satz wird jetzt allein und ohne das Anhängsel des Beweises verwendet. (BGM III §27)

8.2.2 Bestimmt der Beweis die Verwendung des Satzes als Regel?

Es bleiben die Möglichkeiten für (b) zu argumentieren, um an der SdB*-These festzuhalten oder zu zeigen, dass der Beweis auch diese anderen Komponenten der Verwendung bestimmt.

Und genau letzteres versucht Wittgenstein später, wenn er erwägt, dass der Beweis nicht nur die Gültigkeit der bewiesenen Regel zeigt, sondern auch, wie diese als Regel zu verwenden ist:

> Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, wie wir uns nach ihr richten sollen?
>
> Der mathematische Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen SINN hat.
>
> Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben drauf an wie er ihn konstruiert. Manchmal z.B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* und dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz überzeugen, so heißt das, daß sie uns dazu bestimmen muß, diesen Satz so und so anzuwenden. Daß sie uns bestimmen muß, das als Sinn,

das nicht als Sinn anzuerkennen. (BGM III §28)

Hier wird der Sinn des mathematischen Satzes über die Verwendung identifiziert (ihn „so und so anzuwenden“ heißt „das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen“) und diese wiederum als durch den Beweis bestimmt beschrieben (sich durch einen Beweis von einem Satz zu überzeugen heißt sich von einer bestimmten Verwendung des Satzes zu überzeugen). Der Beweis überzeugt uns nicht nur davon, einen mathematischen Satz als Regel zu verwenden, sondern auch davon, *wie* er zu verwenden ist (vgl. auch BGM VI §3-4).

Wittgenstein bleibt aber eine zufriedenstellende Erklärung schuldig, wie genau der Beweis die Anwendung des Satzes bestimmen soll.[12] Das Beispiel, das Wittgenstein hier nennt, ist das eines konstruktiven Existenzbeweises (vgl. auch MS 127 S. 185-6). Solche Beweise beweisen mathematische Sätze der Form „Es gibt ein x für das gilt...“, indem sie zeigen, wie sich ein solches x *konstruieren* lässt. In diesem Fall liefert der Beweis also tatsächlich zusätzliche Informationen, die in der Anwendung relevant sein können.

Zum Beispiel ist es üblich die *Determinante* einer quadratischen[13] Matrix über die sogenannten *Weierstraß-Axiome* zu definieren:

Definition (Determinante)**.** *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eine Abbildung*

$$\det : M(n \times n, K) \to K$$

heißt Determinante, falls folgendes gilt:

- $\det$ *ist linear in jeder Zeile,*
- $\det$ *ist alternierend,*
- $\det E_n = 1$.

Der Satz über die Existenz (und Eindeutigkeit) der *Determinante*:

[12] Mühlhölzer hält diesen Teil der Bemerkung ebenfalls für „wenig überzeugend“ (Mühlhölzer 2010, S.230).

[13] „Quadratisch“ bedeutet in diesem Fall, dass die Matrix ebenso viele Zeilen wie Spalten hat.

Satz (Existenz und Eindeutigkeit der Determinante)**.** *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau eine Determinante*

$$\det : M(n \times n, K) \to K.$$

Diese kann für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ berechnet werden durch die Leibniz-Formel

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} \right)$$

kann dann über die Herleitung der *Leibniz-Formel* bewiesen werden. Und die *Leibniz-Formel* lässt sich nun wiederum *verwenden*, um die Determinante in einem konkreten Fall auszurechnen (wenngleich es meistens effizientere Verfahren gibt, die zum Teil aber wiederum von der Leibniz-Formel abgeleitet sind, wie z.B. der Laplacesche Entwicklungssatz). Ferner folgt aus der *Leibniz-Formel* z.B. sofort, dass die *charakteristische Funktion* $P_A(t) := \det(A - t \cdot E_n)$ eines durch die Matrix A dargestellten *Endomorphismus* ein *Polynom* ist, was aus den Weierstraß-Axiomen nicht ganz so offensichtlich ist. In diesem Fall ist die Konstruktion der Determinante durch die Leibniz-Formel in der Anwendung also tatsächlich nützlich.

Doch einerseits verweist Wittgensteins Beispiel auf einen sehr speziellen Typ von Fällen und lässt sich nicht ohne Weiteres auf andere mathematische Beweise übertragen. Eben weil es für manche Anwendungen nicht genügt zu wissen, dass es ein solches x gibt, sondern ein konkretes x benötigt wird, unterscheiden Mathematiker zwischen „konstruktiven“ und „nicht-konstruktiven“ Existenzbeweisen. Und andererseits werden mathematische Existenzsätze, durchaus auch verwendet um weitere Sätze zu beweisen, ohne sich dabei auf konkret konstruierte x-e. zu beziehen.

Der *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei*
$P : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$
ein nicht konstantes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat P eine Nullstelle.

wird in der Regel nicht einmal konstruktiv bewiesen (obwohl dies auch möglich ist), sondern z.B. indirekt über den *Satz von Liouville* nach dem jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion konstant ist.

Aus dieser Existenzaussage lässt sich dann zum Beispiel folgern, dass jede quadratische $\mathbb{C}$-Matrix einen Eigenwert hat, was wiederum essentiell zum Beweis der Existenz der *Jordanschen Normalform* für Endomorphismen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

Ein anderes wäre der *Mittelwertsatz* von Lagrange:

Satz (Mittelwertsatz). *Sei* $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann gibt es ein* $\xi \in]a,b[$ *mit*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Für den Mittelwertsatz gibt es gar keinen konstruktiven Beweis, aber durchaus Anwendungen.

Ferner handelt es sich dort, wo konkrete x-e konstruiert werden, genau genommen nicht um eine Verwendung des mathematischen Satzes „Es gibt ein x für das gilt...“, sondern um die Verwendung einer mathematischen Regel, die man in der Form „Es gibt ein x für das gilt... und dieses/ein solches lässt sich durch folgendes Verfahren konstruieren... “ ausdrücken kann. Anstatt zwischen „konstruktiven“ und „nicht-konstruktiven“ Existenz*beweisen* zu unterscheiden, wäre es also vielleicht treffender, die zusätzliche Information im Satz festzuhalten. Und so wird es in der Praxis auch durchaus oft gehandhabt, vgl. z.B. den oben angegebenen Satz über die Existenz der Determinante, den man auch fast wörtlich in dieser Formulierung im Lehrbuch von Fischer (2000, S.192) findet.

Dies mag wie ein Zugeständnis an Wittgenstein durch die Hintertür klingen (als hätte man damit den Beweis einfach im Satz versteckt), ist es aber nicht: Auch der zweite Satz bedarf eines Beweises, nämlich eines Beweises, der begründet, *warum* das Konstruktionsverfahren das richtige leistet. Das Konstruktionsverfahren *verwenden* kann man aber auch ohne zu wissen, warum es funktioniert.

Ein Beispiel hierfür wäre die aus der Schule bekannte Kettenregel zum Ableiten:

Satz (Kettenregel)**.** *Seien* $g : \mathbb{R} \supset I \to J$ *in* $x \in I$ *und* $f : J \to \mathbb{R}$ *in* $g(x)$ *differenzierbar. Dann existiert die Ableitung von* $f \circ g$ *in* x *und es gilt*

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Diese Regel wird im Alltag einer Ingenieurin,[14] beispielsweise, ständig verwendet, um Ableitungen konkreter Funktionen auszurechnen, ohne dass sie wahrscheinlich jemals einen Beweis dafür gesehen hat, warum die verwendete Formel gilt. [15]

Wittgenstein gibt keine aufschlussreicheren Beispielen dafür, wie der Beweis die Verwendung des bewiesenen Satzes zeigen soll. Und das liegt vermutlich daran, das es keine gibt. Zumindest steht die Behauptung, erst der Beweis zeige, wie der bewiesene Satz zu verwenden ist in starkem Kontrast zu unserer Erfahrung, wie insbesondere das letzte Beispiel schon nahelegt. Üblicherweise kennen Physikerinnen, Ingenieurinnen oder Ökonominnen nicht für jeden mathematischen Satz, den sie verwenden auch einen Beweis. Sei verwenden sie nichts desto trotz erfolgreich (vgl. (VoB) in 8.1.2).

Im zweiten Band der sehr populären *Feynman Lectures on Physics*[16] werden zum Beispiel, je nach Bedarf der relevanten Materie, verschiedene Resultate der Linearen Algebra, der Reellen Analysis und der Funktionentheorie ohne Beweis eingeführt. Und sofern dort überhaupt „Beweise“ zu finden sind, handelt es sich dabei eher um illustrative Skizzen der involvierten Beweisideen, die als Lösungen zu Übungsaufgaben in der Mathematik sicherlich niemals die volle Punktzahl erzielt hätten. Die zahlreichen Leser sind allem Anschein nach dennoch in der Lage, die Verwendung dieser Sätze in den entsprechenden physikalischen Sprachspielen zu verstehen. Und mit der wachsenden Komplexität der Wissenschaften erscheint es gar nicht mehr menschenmöglich

[14]Da Wittgenstein *selbst* zwar kein Mathematiker oder Physiker, aber immerhin *ausgebildeter Ingenieur* war, hätte ihm *dies* auffallen sollen.

[15]Sie wird jedenfalls sicherlich keinen Beweis für die mehrdimensionale Kettenregel kennen, die sie ebenfalls verwendet.

[16]Band 2 behandelt vor allem Elektrodynamik und enthält daher mehr Beispiele von der Verwendung höherer Mathematik in der Physik als der erste Band zur Mechanik.

zu sein, dass alle Anwenderinnen von Mathematik über ein derart detailliertes Wissen über die von ihnen verwendete Mathematik verfügen.

Feynman, der für seine eher herablassende Haltung gegenüber Mathematikerinnen bekannt ist,[17] überlässt es an einer Stelle großzügig den Mathematikern, ihre Sätze zu beweisen, da anderenfalls „that subject matter would become too dull“ (lect. 7-2) und spottet über die Unfähigkeit derer „mathematical minds“, die Art von „broad understanding of equations“ zu gewinnen, die für die Physik von Nöten ist (cf. lect. 2-1). Von dem spöttischen Unterton einmal abgesehen unterstreicht dies den Punkt, dass die erfolgreiche Verwendung mathematischer Sätze in der Mathematik ein Verständnis dieser Sätze voraussetzt, dass nicht durch einen mathematischen Beweis herbeigeführt werden kann, nämlich zu erkennen, wo und wie diese mathematischen Sätze als *Regeln* in physikalischen Sprachspielen verwendet werden können. Und folglich ist es sinnvoll in der Ausbildung von Nachwuchsphysikerinnen diese Fähigkeiten zu trainieren anstatt die verwendeten Sätze im Detail zu beweisen.

Hier könnte man erneut einwenden, dass Wittgenstein zwischen der Verwendung mathematischer Sätze in mathematischen und in empirischen (z.B. physikalischen) Sprachspielen unterscheidet. Doch wie wir bereits am Beispiel der Kettenregel gesehen haben, verwenden Anwenderinnen mathematische Sätze auch *innerhalb* der Mathematik erfolgreich, ohne einen Beweis für sie zu kennen.

Dieses Phänomen ist vielen sicherlich auch noch aus der Schule bekannt, wenn dort in den Klausuren sogenannte Formelsammlungen verwendet werden durften: Solche Formelsammlungen stellen, in der Regel ohne entsprechende Beweise, mathematische Sätze zusammen, die die Schülerinnen verwenden dürfen, – gerade in der Analysis werden die entsprechenden Sätze oft noch nicht mal im Unterricht bewiesen. Trotzdem sind normal kompetente Schülerinnen in der Lage, diese Sätze an den passenden Stellen korrekt zu verwenden und die ihnen gestellten Aufgaben so zu lösen.

Und selbst an den mathematischen Instituten von Universitäten

[17] Obwohl er die immense Nützlichkeit der Mathematik als Instrument für physikalische Beschreibungen der Natur durchaus zugesteht.

findet man Beispiele von erfolgreichen Verwendungen mathematischer Sätze in Unkenntnis derer Beweise – typischerweise dort, wo in einem Teilbereich der Mathematik Probleme auftreten mit denen sich typischerweise ein anderer Teilbereich der Mathematik beschäftigt, oder wenn sich Probleme aus einem Bereich in Probleme aus einem anderen Bereich transformieren lassen.

In der Differentialgeometrie werden beispielsweise oft Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bestimmter Anfangswertprobleme benötigt. Und über die Betrachtung der Fundamentalgruppe topologischer Räume lassen sich topologische Sätze mittels Gruppentheorie herleiten und umgekehrt. Aber Mathematikstudentinnen müssen nicht unbedingt erst Differentialgleichungen oder Gruppentheorie lernen, um zu verstehen wie die aus diesen Bereichen importierten Sätze in den differentialgeometrischen oder topologischen Zusammenhängen verwendet werden, die sie gerade lernen.

Und dasselbe gilt für forschende Mathematikerinnen. Der britische Mathematiker Simon Donaldson hat z.B. in dem Beweis des nach ihm benannten Satz über die Topologie 4-dimensionaler Mannigfaltigkeiten (Donaldson 1983), der in den frühen 80er Jahren für einiges Aufsehen in der wissenschaftlichen Gemeinde sorgte, Sätze aus der Eichtheorie verwendet, deren *Beweis* ein tiefes Verständnis dieser Theorie voraussetzt. Die meisten seiner Kollegen aus der Topologie waren sicherlich nicht in der Lage, die im Beweis verwendeten Sätze aus der Eichtheorie zu beweisen. Aber sie waren trotzdem in der Lage zu verstehen, wie diese Sätze im Beweis von Donaldsons Satz verwendet wurden (vgl. auch Scorpan 2005).

Dass auch innerhalb der Mathematik die Fähigkeit Sätze unabhängig von der Kenntnis ihrer Beweise als Regel zu verwenden beinahe einer praktischen Notwendigkeit gleichkommt, tritt noch umso deutlicher vor Augen, wenn man bedenkt, dass die SdB$^{(*)}$-These genau genommen eine Herleitung aus den jeweiligen Axiomen verlangt. Überall dort, wo wir im Beweis eines mathematischen Satzes andere mathematische Sätze als Transformationsregeln verwenden, müssten wir auch diese erst beweisen, bzw. einen Beweis für sie nachvollzogen haben, um sie sinnvoll verwenden zu können usw.

Wenn wir mathematische Sätze sowohl außerhalb als auch *innerhalb* der Mathematik verwenden können, ohne einen Beweis für sie zu kennen, dann kann es nicht die Rolle dieser Beweise sein zu zeigen, *wie* diese Sätze verwendet werden.

Ob die entsprechenden mathematischen Wort-Symbol Ketten als mathematische Sätze verwendet werden *dürfen*, hängt natürlich immer noch davon ab, ob sie bewiesen werden können. Aber *wie* sie als solche verwendet werden, hängt nicht davon ab, wie dieser Beweis aussieht.

Auch diese von Wittgenstein erwogene Option erweist sich also als unhaltbar; die Inkompatibilität zwischen SdB$^{(*)}$-These und der Gebrauchsauffassung lässt sich auf diesem Wege nicht auflösen. Und auch an Option (b) lässt sich auf Grund der genannten Beispiele aus der Praxis nur dann festhalten, wenn man argumentiert, Physikerinnen, Ingenieurinnen und auch Mathematikerinnen könnten mathematische Sätze erfolgreich verwenden, ohne ihren Sinn zu verstehen – was höchst unplausibel ist.

Wittgenstein selbst schien von der angedachten Lösung aus der eingangs dieses Abschnitts zitierten Bemerkung (BGM III §28) keinesfalls überzeugt zu sein. Die umgebenden Passagen in *BGM + Nachlass* zeugen davon, wie er damit ringt, den Zusammenhang zwischen Sinnbestimmung (durch den Beweis und damit von diesem abhängig) und Sinnverwendung (anscheinend, zumindest teilweise, unabhängig vom Beweis) angemessen zu erfassen und wie er dabei gelegentlich sogar verzweifelt. Mehrere dieser Passagen wurden in der Auswahl der *BGM ausgelassen*, die daher ein verzerrtes Bild darauf werfen können, mit welcher Sicherheit Wittgenstein seine Ideen zum Zusammenhang von Sinn und Beweis entwickelt:[18]

1) Bewege ich mich im Kreise?

Man könnte z.B. sagen ein Beweis schaffe den Begriff des Folgens *dieses* Satzes aus *diesem* Satze.

[18]Die ersten vier Nachlasspassagen werden ebenfalls kommentiert in Mühlhölzer 2010, Kapitel II.3.

Aber, will ich fragen: wie wird dieser [durch den Beweis geschaffene] Begriff [d.h. der bewiesene Satz] verwendet? (MS 122 S.57, ausgelassene Passage zwischen BGM in BGM III §33)

2) Was ist es, was mir unklar ist: ist es die Rolle eines Beweises in Sprachspielen? (MS 122 S.59, ausgelassenen Passage zwischen BGM III §33 und §34)

3) Der Beweis ist unser Vorbild dieses Weges. Was aber die Wichtigkeit dieses Weges ist, ist damit noch nicht gesagt. –

   Es genügt nicht zu sagen: „ich bin willens, diese Konstruktion als Beweis dieses Satzes anzuerkennen“, sondern ich muß sagen: – „dieses Satzes, den ich so und so gebrauche“. (MS 122 S.61, ausgelassene Passage zwischen BGM III §36 und §37)

4) Was ist es denn was Dich quält? Das Fehlen der Übersicht über den Gebrauch des Beweises. (MS 122 S. 65, ausgelassene Passage zwischen BGM III §36 und §37).

5) Was ich immer tue, scheint zu sein, zwischen Sinnbestimmung und Sinnverwendung einen Unterschied hervorzuheben. (BGM III §37)

6) (Ich fürchte, ich bin vielleicht nicht mehr jung genug, den Purzelbaum zu machen, der vielleicht hier nötig ist.) (MS 122 S.68 ausgelassene Passage zwischen BGM III.37 und 38)

Während Wittgenstein in 2) und 4) generell seine Schwierigkeit zu Ausdruck bringt, die Rolle von Beweisen zufriedenstellend zu erfassen, spezifiziert er in 1) und 3), dass er insbesondere nicht weiß, wie er die *Verwendung* bewiesener Sätze angemessen in seine Auffassung vom Zusammenhang zwischen Satz und Beweis integrieren soll. In 5) verleiht er schließlich seiner Verzweiflung darüber Ausdruck, dass alle Versuche diese Aspekte angemessen zu erfassen, ihn – unwillentlich – dazu führen, „einen Unterschied“ zwischen „Sinnbestimmung [durch den Beweis] und Sinnverwendung [möglicherweise unabhängig vom Beweis]“ hervorzuheben. Denn diese Unterscheidung ist Wittgenstein nicht bereit zu treffen, wie wir im Folgenden sehen werden.

8.3 Die SdB$^{(*)}$-These beginnt zu wackeln

Nicht zuletzt wegen der im ersten Abschnitt (8.1.2) genannten Probleme, steht Wittgenstein zumindest der SdB-These in seinen späteren Bemerkungen zunehmend kritisch gegenüber.

Im letzten Kapitel (7.3.2) wurde bereits erwähnt, dass Wittgenstein die drastischen Konsequenzen, die er in der mittleren Phase noch aus der SdB-These zieht – „Es kann nicht zwei unabhängige Beweise eines mathematischen Satzes geben." (PB S.184) – später so nicht mehr stehen lassen möchte: „Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz nicht mehrere Beweise haben kann – denn so sagen wir eben." (BGM III §58) Die mathematische Praxis ist nach Wittgensteins Überzeugung unbedingt zu beachten. Es bleibt an dieser Stelle allerdings noch unklar, *wie* es aus seiner Sicht zu erklären ist, dass wir „so sagen".

Mehr Aufschluss gibt eine spätere Bemerkung aus dem Frühjahr 1941 – die im Teil III veröffentlichten Bemerkungen sind 1939-40 entstanden:

> Wie ist es nun, — soll ich sagen: Der gleiche Sinn könne nur einen Beweis haben? Oder: wenn ein Beweis gefunden wird, ändere sich der Sinn?
>
> Freilich würden Einige sich dagegen wehren, sagen: »So kann man also nie den Beweis eines Satzes finden, denn, hat man ihn gefunden, so ist er nicht mehr Beweis dieses Satzes.« Aber das sagt noch gar nichts. —
>
> Es kommt eben darauf an, was den Sinn des Satzes festlegt. Wovon wir sagen wollen, es lege den Sinn des Satzes fest. Der Gebrauch der Zeichen muß ihn festlegen; aber was rechnen wir zum Gebrauch?
>
> Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide erweisen ihn für uns als ein passendes Instrument zum gleichen Zweck.
>
> Und der Zweck ist eine Anspielung auf Außermathematisches.

> Ich sagte einmal: ›Wenn Du wissen willst, was ein mathematischer Satz sagt, schau, was sein Beweis beweist.‹ Nun, ist darin nicht Wahres und Falsches? Denn ist der Sinn, der Witz eines mathematischen Satzes wirklich klar, sobald wir nur dem Beweis folgen können? (BGM VII §10)

Hier nimmt Wittgenstein seine strikte Formulierung der SdB-These aus der mittleren Phase explizit zurück und gesteht zu, dass der Beweis zumindest nicht *hinreichend* ist, um den Sinn des Satzes zu verstehen, obwohl er vielleicht immer noch *notwendig* dafür sein mag (SdB*). Er tut dies nachdem ihn die Frage, ob verschiedene Beweise denselben Satz beweisen können (Problem (eSvB)), dazu geführt hat zuzugestehen, dass der Sinn eines mathematischen Satzes durch seinen Gebrauch festgelegt werden sollte (was ja der Bedeutungsauffassung seiner späten Sprachphilosophie entsprechen würde). Den Gebrauch eines mathematischen Satzes identifiziert er hier anscheinend mit seinem *außermathematischen* Gebrauch.

So wäre das Problem gelöst: Wenn der Sinn eines mathematischen Satzes über seinen Gebrauch identifiziert werden kann und dieser Gebrauch unabhängig vom Beweis des Satzes ist, gibt es keinen Grund, warum die Resultate verschiedener Beweise nicht dasselbe sein sollten, solange sie auf dieselbe Weise verwendet werden.[19] Die im letzten Abschnitt dargestellten Beispiele aus der Praxis würden diese Lösung ferner nahelegen, insbesondere wenn man, anders als Wittgenstein dies hier tut, den innermathematischen Gebrauch mathematischer Sätze als Regeln mit einbezieht. Dieser ist, wie ich im vorangegangenen Abschnitt gezeigt habe, in der selben Weise unabhängig vom Beweis des

[19] Am Ende von III §58 heißt es:

> »Zwei Beweise beweisen dasselbe, wenn sie mich vom Gleichen überzeugen.« – Und wann überzeugen sie mich vom Gleichen? Wie weiß ich, daß sie mich vom Gleichen überzeugen? Natürlich nicht durch Introspektion.
>
> Man kann mich auf verschiedenen Wegen dazu bringen, diese Regel anzunehmen.

Wenn man den letzten Satz als Antwort auf die zuvor aufgeworfenen Fragen versteht, könnte man sagen, dass sich die Gedanken aus VII §10 in III §58 schon angedeutet finden.

entsprechenden Satzes.

Wittgenstein hat allerdings die Idee vom notwendigen Zusammenhang zwischen Beweis und Verwendung nach wie vor nicht aufgegeben. In Teil VI der *BGM* zeigt sich dies durch Äußerungen wie folgende:

> Der Beweis steht im Hintergrund des Satzes, wie die Anwendung. Er hängt auch mit der Anwendung zusammen.
>
> [...]
>
> Der Beweis ist also auch eine Anweisung zur Benützung der Regel.
>
> [...]
>
> [Der Beweis] zeigt *wie* und daher warum [die Regel] benützt werden kann.
>
> [...]
>
> Der Beweis zeigt, *wie man nach der Regel vorgeht.* (BGM VI §2-4)

Eine genau Datierung von MS 164, das in diesem Teil (fast) vollständig abgedruckt ist, ist laut den Herausgebern nicht möglich. In der Überschrift von Teil VI wird dieser auf „ca. 1943/44" datiert, in der Einleitung wollen sie sich nur auf den Zeitraum 1941-44 festlegen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit sind diese Bemerkungen aber später entstanden als BGM VII §10 (aus dem Frühjahr 1941).

Wittgenstein scheint jedenfalls von keiner Variante vollends überzeugt zu sein.

Einige Bemerkungen weiter sagt Wittgenstein explizit, dass die Regel, die wir im Beweis hergeleitet haben – d.h. diejenige, die in dem bewiesenen Satz ausgedrückt wird – unabhängig von diesem Beweis sein muss:

> Du ziehst aus dem Beweis eine Lehre. Wenn du aus dem Beweis eine Lehre ziehst, so muss ihr Sinn unabhängig sein vom Beweis; denn sonst hätte sie nie vom Beweis getrennt werden können. (BGM VI §10)

Dies klingt nun nach einer deutliche Abkehr von der SdB-These und sogar der moderateren SdB*-These, die aus der Einsicht resultiert, dass wir mathematische Sätze in der Praxis unabhängig von ihrem Beweis verwenden.

An anderer Stelle argumentiert Wittgenstein sogar, dass „man einen Beweis genau kennen und ihm Schritt für Schritt folgen kann, und dabei doch, was bewiesen wurde, nicht *versteht*“, da man ihn erst versteht, „wenn man ihn anwenden kann“ (BGM V §25). Der Beweise wäre demnach also zumindest *nicht hinreichend*, um den Sinn des bewiesenen Satzes zu bestimmen. Diese Situation ist vielen Studierenden der Mathematik wahrscheinlich nur zu gut bekannt, wenn sie über ihren Vorlesungsaufzeichnungen brüten und in den dort notierten Abfolgen von Definitionen, Sätzen und Beweise mehr oder weniger vergeblich nach einem Hinweis suchen, wie sie ihre Übungsaufgaben lösen sollen.

8.3.1 Zur Idee, der Beweis bestimme den Ort des mathematischen Satzes in einem System von mathematischen Sätzen

In BGM VI §10 fügt Wittgenstein allerdings sogleich an: „Es ist so als bestimmte der Beweis den Sinn des bewiesenen Satzes; und doch wieder als bestimmte er ihn nicht.“ Damit ist die scheinbar deutliche Abkehr sofort wieder relativiert.

Und im Anschluss unternimmt Wittgenstein sogleich einen neuen Versuch, die so eben zugestandene (teilweise) Unabhängigkeit mathematischer Sätze von ihren Beweisen zu erklären, ohne die SdB*-These vollständig aufgeben zu müssen.

> Ich glaube: Nur in einem bestimmten großen Zusammenhang kann man überhaupt sagen es gäbe unendlich viele Primzahlen. D.h.: Es muß dazu schon eine ausgedehnte Technik des Rechnens mit den Kardinalzahlen geben. Nur innerhalb dieser Technik hat dieser Satz Sinn. Ein Beweis des Satzes gibt ihm seinen Platz im ganzen System der Rechnungen. Und dieser Platz kann nun auf mehr als eine Weise beschrieben werden, da ja das ganze komplizierte System im Hintergrund doch vorausgesetzt

wird. (BGM VI §11)

Der Beweis soll dem bewiesenen Satz seinen „Platz“ innerhalb der Mathematik (oder eines bestimmten Bereiches der Mathematik) geben und ihm so seinen Sinn verleihen. Gemäß diesem Bild ist der Satz zwar abhängig von seinem Beweis, der ihm diesen Platz gibt, kann dann als unabhängig betrachtet werden sobald dieser Platz erstmal erreicht ist:

> Wenn der Beweis eine Straße ist zu diesem Satz, welche Rolle spielt diese Straße noch,— wenn wir sie einmal gegangen sind? Sie gibt dem Satz seinen Ort in einem System. (MS 122 S.58)[20]

Da derselbe Ort auf verschiedene Weise erreicht werden kann, wären in diesem Bild mehrere Beweise für einen Satz möglich. Ein Satzkandidat hätte hingegen (noch) keinen Platz im System und daher keinen Sinn:

> Nun warum nicht sagen: Wenn Du wissen willst, was für einen Sinn der Goldbachsche Satz hat, sieh hin was die Mathematiker, die ihn beweisen wollen, beweisen wollen — und wenn Du das sehen willst, sieh () was sie tatsächlich tun, welche Anläufe sie machen ihn zu beweisen.
>
> Denn mit diesen Anläufen reihen sie ja den Satzausdruck auch ein. Wenn sie, sozusagen, seinen Ort auch nicht (ganz) genau bestimmen, so umschreiben sie ihn doch. (MS 123, S.65)

Diese Konsequenzen, die sich aus diesem Bild ergeben, sind gerade die von Wittgenstein gewünschten: Verschiedene Beweise für den selben Satz finden ihren Platz als verschiedene Wege zum selben Ort. Ohne den Weg gelangen wir nicht zum Ort, wir können ihn allenfalls umschreiben: Ohne einen Beweis hat der Satz keinen definitiven Sinn, wir haben allenfalls eine vage Vorstellung von seinem Sinn. Wenn wir den Ort erst einmal erreicht haben, spielt der Weg dorthin keine Rolle

[20] Vollständig zitiert und kommentiert findet sich diese Bemerkung in Mühlhölzer 2010, S.252

mehr: wenn der Satz erst einmal bewiesen ist, hat einer gewisse Unabhängigkeit vom Beweis.

Das Bild selbst hat jedoch keinerlei Erklärungskraft. Es ist völlig unklar, was man sich unter einem solchen „Ort“ vorzustellen hat, der ja als Identitätskriterium eines Satzes dienen soll. Und folglich ist ebenso unklar, wie festgestellt werden kann, dass zwei Beweise tatsächlich zum selben „Ort“ führen. Der Ort kann jedenfalls nicht über die Verwendungen des Satzes bestimmt werden, da diese gerade nicht über den Beweis festgelegt werden, wie ich im letzten Abschnitt dargelegt habe und Wittgenstein in BGM VI §10, V §25 zugestanden zu haben schien.

Auch dieser Versuch Wittgensteins, zumindest die SdB*-These zu retten, muss deshalb meiner Ansicht nach letztlich als gescheitert angesehen werden.

8.3.2 Zur Frage inwiefern sich mathematische Vermutungen doch verstehen lassen

In BGM VI gesteht Wittgenstein schließlich auch zu, dass Mathematikerinnen Vermutungen, hier am Beispiel des Satzes von Fermat, der zu Wittgensteins Zeit noch eine Vermutung war, „nicht *ganz* ratlos“ gegenüberstehen (BGM VI §13). Zur Erklärung ergänzt er dann aber, dass sie ihm insofern nicht ganz ratlos gegenüberstehen als sie einige Ideen haben, wie man versuchen könnte, ihn zu beweisen.[21]

Auch hier hält er also doch wieder zumindest an der SdB*-These fest und fällt damit im Problembewusstsein hinter die bereits diskutierten Stellen BGM VII §10, VI §10, V §25 zurück.

Hätte er hier die Idee wieder aufgegriffen, dass der Sinn eines mathematischen Satzes über seine Verwendung bestimmt wird, die ihrerseits unabhängig vom Beweis ist, so hätte er stattdessen wie folgt argumentieren können: Mathematikerinnen begreifen den Sinn von mathematischen Vermutungen insofern, als dass sie wissen, wie diese Kandidaten *verwendet werden könnte*, wenn sie bewiesen wären. Sie kennen

[21] Eine detaillierte Ausarbeitung dieser Idee findet sich in Säätelä 2011. Die Bemerkungen, in denen Wittgenstein erwägt, dass sich der Sinn eines mathematischen Satzes über dessen Verwendung bestimmen lässt, erwähnt Säätelä allerdings nicht.

zum Beispiel einige Übergänge zwischen (mathematischen oder empirischen) Sätzen, die dadurch legitimiert werden würden, oder einige mathematische Wort-Symbol Ketten oder empirischen Sätze, die dadurch als unsinnig vom Diskurs ausgeschlossen werden würden.

Kurzum, Mathematiker wissen, wie sich eine Vermutung als mathematische Regel verwenden ließe; sie verstehen, welche (potentielle) Regel in der Vermutung ausgedrückt wird.

Aus systematischer Sicht kann kein Zweifel daran bestehen, dass Mathematikerinnen mathematische Vermutungen in diesem Sinne verstehen. Es gibt schließlich, wie im letzten Kapitel bemerkt (7.2.3), ganze Dissertationen, die sich damit beschäftigen, welche mathematischen Sätze gelten würden, *wenn* die Riemannsche Vermutung bewiesen wäre.

Ferner scheint mir dies auch ziemlich adäquat zu beschreiben, inwiefern Mathematikerinnen (und ausreichend gebildete Nicht-Mathematikerinnen) behaupten würden, mathematische Vermutungen oder offene Probleme zu verstehen – adäquater zumindest als Wittgensteins Erklärung, dass sie ein paar vage Ideen haben, welche Methoden man im Beweis verwenden könnte – und was sie damit meinen, wenn sie die entsprechenden Kandidaten „Vermutung“ oder „offenes Problem“ nennen.

Eine Bemerkung aus dem Frühjahr 1944 *ließe* sich so lesen, als sei Wittgenstein schließlich auch zu diesem Ergebnis gelangt:

> Es ist klar, man kann auch den unbewiesenen mathematischen Satz anwenden; ja auch den falschen.
>
> Der mathematische Satz sagt mir dann: Verfahre so!
> (BGM VII §72)

Diese Deutung stünde allerdings auf höchst wackeligen Füßen. Es ist keinesfalls auszuschließen und es erscheint mir sogar sehr wahrscheinlich, dass sich Wittgenstein nie gänzlich von der Idee eines notwendigen Zusammenhangs zwischen Beweis und Verwendung (und damit von der SdB*-These) verabschiedet hat. Und selbst wenn er diese Idee zum Ende seiner Beschäftigung mit Mathematik tatsächlich doch aufgegeben haben sollte, findet sich bei ihm jedenfalls keine brauchbare Ausarbeitung dieser Alternative.

8.4 Die Alternative: Aufgabe der SdB*-These

Nachdem alle Versuche Wittgensteins einen notwendigen Zusammenhang zwischen Beweis und Verwendung mathematischer Sätze zu verteidigen gescheitert sind, erscheint es naheliegend, die SdB$^{(*)}$-These aufzugeben und den Sinn mathematischer Sätze, im Einklang mit der Gebrauchsauffassung der Bedeutung aus den *PU*, als durch deren Verwendung in empirischen und mathematischen Sprachspielen gegeben aufzufassen.

Welche Rolle spielen Beweise nun in diesem Bild? Wie bereits betont, entscheidet der Beweis natürlich immer noch darüber, *ob* eine entsprechende mathematische Wort-Symbol Kette überhaupt als mathematischer Satz verwendet werden *darf*. Solange wir es nur mit Vermutungen zu tun haben, wissen wir zwar, wie wir sie verwenden könnten, wenn sie bewiesen – also ein mathematischer Satz – wären. Aber wir wissen (noch) nicht, ob wir die entsprechende Regel gerechtfertigter Weise annehmen dürfen. Auch diese Idee findet sich in Wittgensteins späten Bemerkungen gelegentlich angedeutet, insbesondere hier (diese Bemerkung stammt aus dem Jahr 1943):

> Der mathematischen Satz sagt mir: Verfahre so.
>
> Ich verfahre also auf den Satz hin wie auf den Beweis der mir zeigt ich dürfe so verfahren.
>
> [...]
>
> Der Beweis überredet mich, so zu verfahren. Der bewiesene Satz sagt: ‚verfahre so!' (MS 127, S.218-19, 1943)

Oder, indirekter, in dieser Passage:

> Man hat jedenfalls noch keinen *klaren* Begriff davon, was es mit dieser Behauptung überhaupt soll. (Man fragt sozusagen: „Wie kann so eine Behauptung überhaupt *gerechtfertigt* werden?") (BGM VI §10, letzte Hvbg. ist meine)

Es fehlt die Rechtfertigung (und nicht der Sinn!), solange wir für einen Satzkandidaten (noch) keinen Beweis haben.

8.4.1 Welche Zusammenhänge zwischen Sinn und Beweis bleiben?

Ist der Sinn mathematischer Sätze damit *gänzlich* unabhängig von ihrem Beweis?

Nein. Zunächst einmal verleihen wir den entsprechenden Wort-Symbol Ketten den Status eines mathematischen Satzes ja immer noch auf Grund eines Beweises. Damit legt er ihre Rolle – nämlich die einer gültigen mathematischen Regel – in mathematischen und nicht-mathematischen Sprachspielen fest. Und dies ist offensichtlich ein wichtiger Beitrag zu ihrer Verwendung und mithin zu ihrem Sinn.

Wie der Satz in dieser Rolle verwendet wird bzw. wie der entsprechende Kandidat in dieser Rolle verwendet werden könnte, verstehen wir aber auch unabhängig vom Beweis. Wenn wir nicht zugestehen, dass wir über diese Art von Verständnis verfügen, wäre es in der Tat obskur, warum wir überhaupt ein besonderes Interesse daran entwickeln bestimmte Kandidaten zu beweisen.

Diese Alternative ist ferner sogar kompatibel damit, dass es einen weiteren Aspekt gibt, den wir nicht verstehen, solange wir einen Satzkandidaten nicht bewiesen haben.

Wie Wittgenstein durchaus überzeugend argumentiert, verstehen wir ohne einen Beweis nicht, *inwiefern* (in welcher Weise) die im Satzkandidaten vorkommenden Begriffe in der behaupteten Beziehung zueinander stehen: „Der Beweis, könnte man sagen, zeigt nicht bloß, *daß* es so ist, sondern: *wie* es so ist: Er zeigt, *wie* $13+14$ 27 ergeben.“ (BGM III §22) oder „*inwiefern* es unendlich viele Primzahlen gibt“ (BGM VI §7, meine Hvbg.; vgl. auch umgebende Passagen.)

Wir wissen nicht, *auf welcher Grundlage* sich die entsprechende mathematische Wort-Symbol Kette als mathematischer Satz äußern lässt, d.h. auf welcher Grundlage sich seine Geltungsansprüche konkret rechtfertigen lassen.

Dies liegt genau an dem von Wittgenstein zu Recht betonten Umstand, dass im Fall mathematischer Sätze, anders als im Fall empirischer Sätze, die Kriterien nach denen sich ihre Wahrheit bzw. Gültigkeit rechtfertigen lässt, nicht vorab klar sind, sondern erst durch den Beweis gegeben werden (vgl. 8.1.1), d.h. in der Koinzidenzthese. Wir wissen, auf welcher Grundlage sich die Wahrheit eines empirischen Satzes wie „Im Garten steht eine rote Gießkanne." rechtfertigen lässt – man kann z.B. hingehen und nachschauen. Und in diesem Sinne wissen wir, inwiefern sich behaupten lässt, es stehe eine rote Gießkanne im Garten. Aber wir wissen nicht inwiefern sich gerechtfertigter Weise sagen lässt: „Es gibt eine Bijektion $f:]0,1[\rightarrow]0,1[\times]0,1[$.", solange wir keinen Beweis für diesen Satz angeben können. Denn ein solcher Beweis liefert erst die Kriterien nach denen sich die Geltungsansprüche dieses Satzes einlösen lassen.

Die Frage nach diesen Kriterien, nach denen sich die Geltungsansprüche mathematischer Sätze einlösen lassen, werde ich im Folgenden, im Anschluss an die oben zitierte Passage in BGM VI §7, *inwiefern-Frage* nennen.

Und obwohl Wittgenstein in den *PU* ein Verständnis der Kriterien, nach denen sich die Wahrheits- bzw. Geltungsansprüche von Sätzen rechtfertigen lassen, nicht mehr für hinreichend oder auch nur in jedem Fall notwendig für ein Verständnis des Satzes erachtet, gesteht er diesen Kriterien immer noch „*einen Beitrag* zur Grammatik des Satzes" zu (PU §353, meine Hvbg.; vgl. 8.2.1).

In beiderlei Hinsicht – indem er dem bewiesenen Satz seinen Regelstatus verleiht und indem er eine Antwort auf die inwiefern-Frage liefert – leistet der Beweis also tatsächlich „einen Beitrag zur Grammatik" des bewiesenen Satzes.

Wie Wittgenstein aber in den *PU* festhält, gibt es verschiedene Aspekte des Gebrauchs, die zum Sinn eines Satzes beitragen. Das heißt, dass wir die Bedeutung eines Satzes verstehen, kann sich auf mehrere, ganz verschiedene Weisen in unserem Verhalten manifestieren. Es heißt aber nicht, dass ein Satz nur dann verständlich wäre, wenn wir alle diese Aspekte des Gebrauchs erfassen. Im Gegenteil, entgegen seiner früheren Auffassung aus dem *Tractatus* lehnt Wittgenstein die Idee, dass der Sinn eines Satzes vollständig bestimmt sein muss oder überhaupt kann, später entschieden ab (vgl. Glock 1996, S.239).

Vor allem der zweite Punkt bedürfte sicherlich einer weiteren Ausarbeitung. Ich will es an dieser Stelle aber dabei belassen aufzuzeigen, dass die genannte Alternative durchaus der Möglichkeit Raum lässt, dass es gewisse Aspekte gibt, die wir nicht verstehen, solange wir einen Satzkandidaten nicht bewiesen haben.

Wichtig ist, dass sich die Beweislast aus dem Blickwinkel der dargestellten Alternative umgekehrt hat. Es gilt nicht mehr zu begründen, inwiefern der vom Satz unabhängige Gebrauch erklärt werden kann, wenn der Sinn eines Satzes doch notwendig mit dessen Beweis verbunden ist oder durch diesen gar vollständig bestimmt ist. Stattdessen gilt es nun zu begründen, inwiefern sich vielleicht doch sagen lässt, dass der Beweis etwas mit dem Sinn des bewiesenen Satzes zu tun hat, welcher seinerseits durch die Verwendung dieses Satzes als grammatische Regel in mathematischen und nicht-mathematischen Sprachspielen gegeben ist.

8.4.2 Schroeders Einwand

Laut Schroeder (2012) sind wir, wenn wir zugestehen, dass der Beweis dem bewiesenen Satz den Status einer grammatischen Regel verleiht, damit schon auf die SdB-These festgelegt. Er argumentiert wie folgt:

> Finally, consider that, for all we know, a mathematical conjecture could be proven false (*RFM* 314d), that is, shown up to be inconsistent. Yet if something is inconsistent, or contradictory, it doesn't make sense: it cannot be understood: there is nothing to be understood. But then, given that we cannot even know whether a mathematical conjecture is at all *understandable* (and not nonsense), then *a fortiori* we cannot claim to *understand* it.
>
> A sentence that as far as we know may be inconsistent, i.e. nonsense, can hardly be said to have a clear sense for us. This again leads to the conclusion that a conjecture, as such, has not as yet a clear mathematical sense. (Schroeder 2012, S.469)

Seine Überlegung basiert auf der folgenden Annahme: Da mathematische Sätze grammatische Regeln ausdrücken, die, als solche, bestimmen, was sich sinnvoll sagen lässt, muss ihre Negation unsinnig sein, und ebenso alle mathematischen Wort-Symbol Ketten, die diese Negation implizieren und damit die im Satz ausgedrückte Regel verletzen. Daher gilt: Wenn ein Satzkandidat falsifiziert wird, womit er zur Negation eine mathematischen Satzes wird, erweist er sich dadurch als unsinnig. Und solange der Kandidat weder bewiesen, noch widerlegt ist, können wir folglich nicht wissen, ob er unsinnig ist oder nicht. Und deshalb, so schließt Schroeder, können wir ihn auch nicht behaupten ihn zu verstehen.

Es gibt natürlich noch eine dritte Möglichkeit, die Schroeder hier nicht erwähnt: Es kann sich herausstellen, dass der Kandidat aus prinzipiellen Gründen, weder beweisbar, noch widerlegbar ist. Dies folgt aus Gödels *erstem Unvollständikeitssatz.* Die *Kontinuumshypothese (CH)* ist das wohl bekannteste Beispiel für einen solchen Kandidaten. So lange wir (noch) nicht *gezeigt* haben, dass ein bestimmter Kandidat unentscheidbar ist, ist diese Möglichkeit irrelevant für Schroeders Argument, denn nach allem, was wir wissen, ist es immer noch möglich, dass sich der Kandidat falsifizieren lässt und sich damit als unsinnig herausstellt. Aber Schroeder steht sicherlich vor einem Problem, was die *bekannten* Beispiele unentscheidbarer Kandidaten anbelangt, wie z.B. CH.

Sein Argument schließt nicht aus, dass wir solche Kandidaten verstehen. Da wir wissen, dass sie prinzipiell nicht falsifiziert werden können, können sie nicht aus dem Grund unsinnig sein, dass sie eine mathematische Regel verletzen. Folglich müsste Schroeder entweder einen anderen Grund dafür angeben, dass wir CH (und Verwandte) nicht verstehen. Und diese These wird schwer zu verteidigen sein, da Mathematikerinnen z.B. in der Lage sind, CH als zusätzliches Axiom von ZFC zu verwenden (ZFC+CH) und mit ihr andere mathematische Sätze zu beweisen (vgl. (VAD) in 8.1.2). Oder Schroeder müsste zugestehen, dass wir unentscheidbare Kandidaten verstehen, dann wäre es schwierig die Behauptung aufrecht zu erhalten, dass wir andere Kandidaten nicht verstehen. Schroeders Argument ist also in einem wichtigen Aspekt unvollständig.

Kehren wir zurück zu den angeblich unsinnigen Negationen mathematischer Sätze. Diese Negationen sind sicherlich unverständlich in dem Sinne, dass wir nicht verstehen können, unter welchen Bedingungen sie wahr wären – wie Hacker schreibt: „logical, grammatical, metaphysical and mathematical impossibilities [d.h. Negationen notwendiger Wahrheiten] are not possibilities that are impossible“ (Baker & Hacker 2009, S.273). Dies gilt trivialer Weise auch für mathematische Vermutungen, da, wie bereits festgehalten, die Bedingungen erst durch den Beweis selbst vorgegeben werden (Koinzidenzthese). Letzteres gilt aber unabhängig davon, ob die Vermutung sich auch als falsch herausstellen kann. Ob wir die Vermutung schließlich beweisen oder widerlegen können (oder keines von beiden) hat keinerlei Einfluss auf unser Unverständnis der Vermutung im obigen Sinne, solange sie noch eine Vermutung ist.

Ferner stellt sich die Frage, ob Negationen mathematischer Sätze wirklich völlig unsinnig sind. Wittgenstein vertritt in Bezug auf logische Kontradiktionen (also Negationen von Tautologien), dass diese zwar sinnlos sind, in dem Sinne, dass sie falsch sind, egal was der Fall ist. Aber sie sind eben nicht unsinnig, da sie eine geregelte Verwendung innerhalb der Logik haben, insbesondere im Zusammenhang mit Widerspruchsbeweisen. Wir können sie also insofern verstehen, dass wir verstehen, was wir daraus folgern können, dass sie logische Widersprüche sind (vgl. Baker & Hacker 2009, S.273-74). Auf ähnliche Weise lässt sich meiner Überzeugung nach auch argumentieren, dass Negationen mathematischer Sätze nicht völlig unsinnig und unverständlich sind (vgl. BGM VII §72: Auch falsche Sätze lassen sich verwenden!).

Obwohl auch Negationen mathematischer Sätze falsch sind, egal was der Fall ist und daher sinnlos, können wir sie verstehen in dem Sinne, dass wir verstehen, welche Folgerungen wir daraus ziehen können, dass sie Negationen mathematischer Sätze sind. Und auch die Fähigkeit, eine mathematische Wort-Symbol Kette als Negation eines mathematischen Satzes zu verwenden hat gewisse Voraussetzungen: Einerseits muss man zunächst einmal wissen, dass es sich bei der entsprechenden Wort-Symbol Kette um die Negation eines mathematischen Satzes handelt, also einen Beweis für den entsprechenden mathematischen Satz haben, oder zumindest wissen, dass es einen solchen gibt. Und andererseits setzt sie, ganz analog zur Fähigkeit, mathematische Regeln zu verwenden, die Fähigkeit voraus Anwendungsfälle zu erkennen, also zu erkennen, dass eine bestimmte Wort-Symbol Kette diese Negation impliziert, z.B. $1704153+2854 = 1707006$ (angenommen, dies sei bisher weder bewiesen, noch widerlegt) $\Rightarrow 3+4 = 6$ ($\Rightarrow \neg(3+4 = 7)$, also die Negation des mathematischen Satzes $3+4 = 7$)[22] und die richtigen Konsequenzen zu ziehen.

Sobald wir eine mathematische Vermutung widerlegt haben, haben wir damit zugleich ihre Negation bewiesen, wodurch wiederum die ehemalige Vermutung den Status „Negation eines mathematischen Satzes" erhält. Damit kann sie jetzt verwendet werden, nur, entgegen der ursprünglichen Vermutung, eben nicht als mathematischer Satz. Nun scheint es mir der Fall zu sein, dass Mathematikerinnen nicht nur wissen, wie ein Satzkandidat verwendet werden könnte, wenn er bewiesen werden könnte, sondern auch, wie er verwendet werden könnte, wenn er widerlegt werden könnte, nämlich als Negation eines mathematischen Satzes. Folglich mangelt es ihnen nur insofern an Bedeutung, dass sie noch keine feste Rolle in der Mathematik zugewiesen bekommen haben – sei es als Satz oder als Negation eines solchen. Was also unklar ist, solange wir weder einen Beweis noch eine Widerlegung haben, ist einzig (i) welche (falls überhaupt eine) der beiden Rollen dem Kandidaten legitimer Weise zugeschrieben werden kann und (ii) wie eine Begründung (d.h. Beweis oder Widerlegung) dafür aussehen könnte. Die Rollen selbst sind hingegen so klar und verständlich wie sie nur sein können.

[22] Es ist zu bemerken, dass indirekte Beweise in der Mathematik damit keine rein logischen Schlüsse sind. Sie verwenden zwar das logische Schlussverfahren

$$[p \wedge (q \rightarrow \neg p)] \rightarrow \neg q,$$

die Behauptung der ersten Implikation setzt aber ein mathematisches Verständnis von q und $\neg p$ voraus.

Baker & Hacker 2009 erwähnen die Rolle von Negationen notwendiger Wahrheiten in indirekten Beweisen nur in Bezug auf logische Kontradiktionen.

8.5 Kompatibilität der Alternative mit der mathematischen Praxis

Kehren wir nun zurück zu den in der Einleitung dieses Kapitels aufgelisteten Phänomenen, die der SdB-These widersprechen und zumindest in einer gewissen Spannung zur SdB*-These stehen (8.1.2). Kann die von mir vorgeschlagenen Alternative diesen Phänomenen Rechnung tragen?

Wenn der Sinn mathematischer Sätze über ihre Verwendung bestimmt ist und der Beitrag, den der Beweis zur Grammatik des bewiesenen Satzes macht, sich darauf beschränkt ihn einerseits als Regel zu validieren und andererseits Antworten auf die *inwiefern*-Frage zu liefern, ergibt sich, wie ich bereits in 8.3.2 dargestellt habe, keinerlei Problem mit unserem anscheinenden Verständnis von mathematischen Vermutungen (aVV).

Die Unabhängigkeit des Gebrauchs (der Negationen) mathematischer Sätze von ihren Beweisen (Widerlegungen) liefert auch den Schlüssel, um die anderen Phänomene aus der Liste zu erklären: Durch die Betrachtung der (potentiellen) innermathematischen Verwendung von mathematischen Satzkandidaten, Regeln (d.h. Sätzen, Definitionen und Axiomen) und Negationen mathematischer Sätze sind wir in der Lage diese unabhängig von ihren Beweisen (Widerlegungen) zu identifizieren und damit unabhängig davon, ob es überhaupt einen Beweis (Widerlegung) gibt.

Die Fähigkeit des Mathematikers mathematische Definitionen und Axiome zu verstehen (VAD) ist nach der vorgeschlagenen Auffassung völlig unproblematisch: Definitionen und Axiome sind mathematische Regeln, die einfach festgesetzt werden und daher keine mathematische Begründung benötigen. Sie mögen zwar einer gewissen Rechtfertigung bedürfen, was ihre Eignung etc. anbelangt, aber dies sind meta-mathematische Fragen (vgl. 7.2.3). In ihrem Fall gehört es zum Verständnis ihrer Funktion, zu wissen, dass sie gerade *keiner* Rechtfertigung bedürfen. Sie zu verstehen heißt folglich (a) zu wissen, dass es sich um Axiome oder Definitionen handelt und sie entsprechend zu behandeln und (b) Anwendungsfälle für die entsprechenden Regeln zu erkennen und diesen Regeln im konkreten Fall korrekt zu folgen. Aber das ist genau die Art und Weise, in der wir auch mathematische Sätze und Satzkandidaten unabhängig von einem Beweis verstehen.[23]

Wie steht es mit der inwiefern-Frage im Fall von Axiomen und Definitionen?

In Bezug auf Definitionen, die einfach abkürzende Schreibweisen einführen, wie Beispiel (viii) in 5.1, ergibt eine inwiefern-Frage überhaupt keinen Sinn. Wer fragt, inwiefern hier das, was links vom Definitionszeichen steht, dasselbe ist, wie das, was rechts vom Definitionszeichen steht, hat ganz offensichtlich nicht verstanden, wie solche Definitionen funktionieren.

Bei Definitionen durch Angabe von Axiomen, wie Beispiel (vii) in 5.1, und insbesondere bei klassischen Axiomen, wie dem Parallelenaxiom, mag die inwiefern-Frage zunächst nahe liegender erscheinen. Und da Axiome keine Beweise haben, wäre es fraglich, ob diese überhaupt beantwortet werden könnte. Allerdings kann man auch hier einwenden, dass genau aus diesem Grund inwiefern-Fragen in Bezug auf Axiome völlig unangebracht sind. Ihr Status als Axiom verlangt intrinsisch, dass solche Fragen nicht gestellt werden. Wenn man dies tut, hat man das mathematische Sprachspiel damit verlassen, man hat nicht verstanden, wie Axiome funktionieren (vgl. BGM IV §3). Innerhalb der Mathematik sind Axiome ohne Begründung zu akzeptieren. Das mag so aussehen, als weiche man der Frage hier nur geschickt aus. Tatsächlich geht unser Verständnis mathematischer Sätze aber auch nicht tiefer als das der Axiome: Wenn wir immer weiter inwiefern-Fragen in Bezug auf die jeweils im Beweis verwendeten Sätze stellen, müssen wir uns schließlich auch auf die Axiome berufen (vgl. BGM VII §73). Wie Aristoteles in der *Zweiten Analytik* zeigt und Wittgenstein in *Über Gewißheit* ausführlich darstellt: Wir müssen etwas (oder besser: gewisse Regeln) voraussetzen, wenn wir andere herleiten wollen.

[23]Für Satzkandidaten beinhaltet (a) zu erkennen, dass es sich um Kandidaten handelt und sie deshalb (noch) nicht legitimer Weise innerhalb mathematischer und empirischer Sprachspiele verwendet werden können und (b) wird deshalb nicht tatsächlich ausgeführt in mathematischen Argumenten (es sei denn, sie sind konditional) oder empirischen Beschreibungen.

Die von mir vorgeschlagene Auffassung liefert des Weiteren ein einfaches Kriterium zwei auf verschiedene Weise (d.h. durch verschiedene Beweise) erreichte Resultate als denselben mathematischen Satz zu identifizieren (eSvB). Sie drücken denselben Satz aus, wenn sie dieselbe Verwendung haben – außerhalb und, wichtiger noch, *innerhalb* der Mathematik. Andererseits kann sie aber auch unserer (und Wittgensteins) Geneigtheit zu denken, dass der Beweis zu einem tieferen Verständnis des bewiesenen Satz beiträgt, gerecht werden: Verschiedene Beweise desselben Satzes führen zu verschiedenen Antworten auf die inwiefern-Frage.

Phänomen (EaBvV) kann auf die selbe Weise erklärt werden: Zwar liefert der Beweis eine Begründung dafür, dass die vormalige Vermutung zum mathematischen Satz zu erklären ist und beantwortet die inwiefern-Frage, er verändert oder bestimmt dadurch aber nicht die (potentiellen) Verwendungen. Folglich lässt sich ein Beweis problemlos als Beweis für Vermutung XY identifizieren.

Und schließlich erscheint es keineswegs mehr mysteriös, dass Mathematikerinnen und Mathematik-Anwenderinnen mathematische Sätze korrekt verwenden können, ohne selbst einen Beweis für sie zu kennen (VoB), wenn der Beweis die Verwendungen zwar legitimiert aber nicht formt.

8.6 Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung aus den *PU* und ein adäquates von Wittgenstein inspiriertes Verständnis des innermathematischen Gebrauchs mathematischer Sätze einen Weg bieten, an Wittgensteins wichtigen Einsichten hinsichtlich der wesentlichen Unterschiede zwischen mathematischen und empirischen Sätzen und Problemen festzuhalten und dabei gleichzeitig die Phänomene der Liste aus der Einleitung dieses Kapitels erklären zu können. Wittgenstein selbst ist diesen Weg leider nicht gegangen, auch wenn er ihn zumindest gegen Ende seiner Beschäftigung mit Mathematik in Ansätzen zu erwägen scheint. Sein

Beharren auf der SdB*-These mit ihren unplausibelen Konsequenzen hat sicherlich nicht dazu beigetragen, die Bedenken zu zerstreuen, die seiner so unorthodoxen späten Philosophie der Mathematik von Anfang an entgegen schlugen. Und das Beharren der Sekundärliteratur, insbesondere im angelsächsischen Raum, darauf, dass Wittgenstein in seiner späten Philosophie der Mathematik gar die starke SdB-These mit ihren offensichtlichen Widersprüchen zur mathematischen Praxis vertritt, hat eine ernsthafte Beschäftigung mit seiner Position aus systematischer Sicht weiter behindert.

Das positive Ergebnis meiner Untersuchungen in diesem Kapitel ist aber, dass man Wittgensteins zentraler Einsicht, dass mathematische Sätze normativ und nicht deskriptiv funktionieren, folgen und ferner auch mit seiner Sicht auf die wesentlich Unterschiede zwischen mathematischen und empirischen Sätzen übereinstimmen kann, ohne sich um die unliebsamen Konsequenzen der SdB$^{(*)}$-These sorgen zu müssen: Ersteres legt uns nicht auf letztere fest.

Entgegen Potters Behauptung würde die Aufgabe der SdB-These und sogar auch der moderaten SdB*-These Wittgensteins Position keinen nachhaltigen Schaden („damage [...] too great to be easily repaired") zufügen (Potter 2011, S.134).

Obwohl Potter Recht hat, wenn er sagt, dass Wittgenstein kein Alternative zur SdB$^{(*)}$-These entwickelt (jedenfalls abgesehen von den oben diskutierten Andeutungen), sehe ich daher keinen Grund ihm in den düsteren Konsequenzen zu folgen, die er daraus zieht: „(O)ne struggles [was die späten Bemerkungen zur Mathematik anbelangt] to present, even in outline, a positive account of mathematics that can be reasonably called Wittgensteinian"; „Perhaps Wittgenstein's failure to make significant progress was inevitable" (*Ibid.*, S.136). Es gibt sicherlich Baustellen in Wittgensteins späten Bemerkungen zur Mathematik und insbesondere sind solche in seiner Arbeit zu mathematischen Beweisen zu finden, wie ihm selbst bewusst war. Aber es gibt vor allem vieles, worauf sich aufbauen lässt!

Kapitel 9

Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit

Im Folgenden sollen die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit abschließend nochmals zusammengefasst werden.

Im einleitenden Teil I habe ich aufgezeigt, dass Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik mit der These, dass mathematische Sätze als Normen der Darstellung empirischer *und* – wie ich in Kapitel 8 ergänzt habe und bei Wittgenstein selbst zu kurz kommt – innermathematischer Zusammenhängen fungieren, eine vielversprechende Alternative für aktuelle Debatten in der Philosophie der Mathematik offeriert. Durch ihre völlig neuartige Idee, das Verhältnis zwischen mathematischen und empirischen Sätzen und den besonderen Status ersterer zu erklären, positioniert sie sich jenseits platonistischer *und* empiristischer Ansätze und erfüllt ferner ein zentrales Desiderat der in den letzten Jahren aufblühenden Philosophie der mathematischen Praxis.

Der Hauptteil III der Arbeit bestand darin, drei wesentliche Hindernisse aus zu räumen, die die systematische Berücksichtigung von Wittgensteins Position in der Philosophie der Mathematik bisher behindert haben bzw. zu behindern drohen.

In **Kapitel 6**, *Mathematik und Regelfolgen*, wurde die Bedeutung der Regelfolge-Überlegungen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik einer Neubewertung unterzogen. Aus dem Blickwinkel anti-skeptischen Interpretationen der Regelfolge-Überlegungen habe ich im Detail gezeigt, an welchen Stellen Dummetts Interpretation von Wittgensteins Position als einem „vollblütigen Konventionalismus“ bezügliche mathematischer Sätze schief geht. Diese Interpretation hat bislang in den Debatten um Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik, hartnäckig ihren Platz behauptet, trotz überzeugendem Widerspruch von Experten, was die zu Grunde liegende Interpretation der RfÜ anbelangt. Ferner habe ich dafür argumentiert, dass die Stellen in den *BGM*, an denen Wittgenstein Dummetts Interpretation prima facie gefährlich nahe zu kommen scheint, tatsächlich anders interpretiert werden müssen.

Des Weiteren dürfen Wittgensteins Bemerkungen zum „blinden“ Regelfolgen nicht so verstanden werden, dass Regelausdrücke und ihre Deutungen grundsätzlich keine Rolle spielen (kontra Marion). Aus systematischer Sicht sind insbesondere beim Befolgen von Regeln der Höheren Mathematik, explizite Regelausdrücke, anders als bei Regeln zur Bildung einfacher Zahlenreihen, wie im Beispiel der RfÜ, sogar praktisch unverzichtbar. Dieser Unterschied wird von Wittgenstein zwar nicht angemessen klar gestellt, er stellt die in den RfÜ angestellten Überlegungen allerdings auch nicht in Frage.

Darüber hinaus, so habe ich argumentiert, kommt den RfÜ im Hinblick auf Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik auch eine positive Bedeutung zu: Sie zeigen auf *inwiefern* sich sinnvoll von den Grundlagen regelgeleiteter Tätigkeiten sprechen lässt und wo die Grenzen des sinnvoll Hinterfragbaren liegen und damit auch, ob und inwiefern sich sinnvoll von den „Grundlagen der Mathematik“ sprechen lässt. Diese „Grundlagen“ haben nichts gemein mit einer *Grundlegung* wie sie während der Grundlagenkrise der Mathematik angestrebt wurde; Grundlagen in einem konstitutiven Sinne kann es nach den RfÜ nicht geben. Sie finden sich in unseren historischen Wandlungen und Aspekten menschlicher Naturgeschichte unterworfenen Lebensformen, in die unsere mathematischen Praktiken ihrerseits eingebettet sind. Diese Art von Grundlagen müssen nicht erst geschaffen werden, sie bestehen bereits. Sie sind notwendige, aber nicht konstitutive Voraussetzungen jedes Mathematiktreibens. Ferner sind sie offensichtlich von Menschen geschaffen. Die Mathematik ist so, trotz des unbestreitbaren

Sonderstatus ihrer Sätze, ein *anthropologisches Phänomen*.

In **Kapitel 7**, *Mathematik und Empirie*, habe ich gezeigt, dass diejenigen Interpretationen aus den letzten Jahren, die Wittgensteins Position in die Nähe einer empiristischen Mathematikauffassung rücken, nicht nur aus *systematischer Sicht* problematisch sind, sondern auch aus *exegetischer Sicht* nicht überzeugen.

Diejenigen Interpretationen, die dafür argumentieren, dass die in mathematischen Sätzen ausgedrückten Regeln unter bestimmten Voraussetzungen durch empirische Erfahrungen ihre Gültigkeit verlieren können, sind nicht haltbar. Wittgenstein gesteht der Empirie zwar eine pragmatische Relevanz für die Entwicklung von Mathematik zu, er beharrt aber zu Recht darauf, dass die Gültigkeit mathematischer Regeln und mithin ihre Unumstößlichkeit davon völlig unabhängig bleibt. Für diese Sicht habe ich ferner eine Wittgensteinianische Begründung angeboten: Die Frage nach der Gültigkeit mathematischer Sätze ist einzig im Rekurs auf Beweise zu klären und diese selbst lassen keine empirischen Argumente zu.

Im Hinblick auf die Frage, wie weit der Inhalt der Mathematik durch die empirischen Gegebenheiten geformt wird, habe ich (kontra Steiner) gezeigt, dass es gemäß Wittgenstein nicht nur einen Einfluss der Empirie auf die Entwicklung der Mathematik gibt, sondern die Mathematik auch ihrerseits unsere (wissenschaftlichen) Beschreibungen der empirischen Daten beeinflusst: Mathematische Sätze werden nicht aus der Natur gewonnen (und dann zu Regeln erklärt), sondern *mittels* mathematischer Regeln werden Beschreibungen der Natur gewonnen. Anders als Steiners Interpretation lässt meine Interpretation insbesondere auch die Möglichkeit von nachträglichen Anwendungen zu. Sie kann damit dem Phänomen Rechnung tragen, dass Mathematik, die zunächst noch keine (außermathematische) Anwendung hat, in manchen Fällen aber zu einem späteren Zeitpunkt z.B. für die Physik interessant wird. Wittgenstein begreift die Tätigkeit des Mathematikers als eine echt kreative Tätigkeit, die folglich durch empirische Gegebenheiten zwar motiviert und begrenzt, aber nicht vorherbestimmt wird.

Ferner habe ich dafür argumentiert, dass in beiden Fällen die von mir vorgeschlagene Interpretation, im Gegensatz zu den diskutierten Alternativen, die tatsächliche mathematische Praxis adäquat beschreibt. Sie ist daher aus systematischer Sicht klar vorzuziehen.

In **Kapitel 8**, *Sinn und Beweis mathematischer Sätze*, habe ich die mit Wittgensteins – jedenfalls von einem Grossteil der Sekundärliteratur insbesondere im angelsächsischen Raum so verstandenen – These, dass der Sinn eines mathematischen Satzes durch dessen Beweis bestimmt sei (SdB-These), verbundenen Probleme systematisch dargestellt: Sie steht im Widerspruch oder, in ihrer schwächeren Formulierung (SdB*) – die auf jeden Fall so in den *BGM* zu finden ist –, zumindest in einer gewissen Spannung zu unserem anscheinenden Verständnis von mathematischen Vermutungen und unserem Verständnis von mathematischen Definitionen und Axiomen, sowie zu den Umständen, dass ein mathematischer Satz verschiedene Beweise haben kann, dass wir Beweise als Beweise für bestimmte Vermutungen erkennen können und dass wir mathematische Sätze auch ohne Kenntnis ihres Beweises verwenden können. Ferner erscheint die SdB$^{(*)}$-These inkompatibel mit Wittgensteins Gebrauchsaufassung der Bedeutung aus den *Philosophischen Untersuchungen* zu sein.

Wittgensteins eigene Lösungsversuche für diese Probleme habe ich exegetisch erschlossen; dabei hat sich gezeigt, dass sich im *Nachlass* keine vollständig zufriedenstellende Lösung dieser Probleme findet. Obwohl Wittgenstein selbst im Laufe der Zeit der These gegenüber immer skeptischer wurde und ihr an manchen Stellen sogar zu widersprechen scheint, verabschiedet er sich doch nie gänzlich von ihr und arbeitet erst recht keine Alternative aus. Ferner habe ich anhand von Beispielen aus der mathematischen Praxis dafür argumentieren, dass die *Verwendung* mathematischer Sätze in nicht-mathematischen, aber auch in *mathematischen* Sprachspielen nahelegt, die These aufzugeben.

Daraufhin habe ich einen eigenen, von Wittgenstein nicht vertretenen, aber inspirierten Vorschlag zur Lösung entwickelt. Dieser Vorschlag basiert auf einer geeigneten Unterscheidung zwischen den Fähigkeiten zur Rechtfertigung und zur Anwendung mathematischer Sätze – insbesondere hinsichtlich des von Wittgenstein und seinen Interpreten bisher vernachlässigten Aspekts der innermathematischen Anwendung

– und hält sich konsequent an Wittgensteins Gebrauchsauffassung der Bedeutung aus den *PU*, ist also klarer Weise mit dieser kompatibel.

Auch wenn Wittgenstein selbst ist diesen Weg, trotz ansatzweiser Erwägung zum Ende seiner Beschäftigung mit Mathematik, leider nicht gegangen ist, zeigt diese Alternative auf, dass man Wittgensteins zentraler Einsicht, dass mathematische Sätze normativ und nicht deskriptiv funktionieren, folgen und ferner auch mit seiner Sicht auf die wesentlich Unterschiede zwischen mathematischen und empirischen Sätzen übereinstimmen kann, ohne sich um die unliebsamen Konsequenzen der SdB$^{(*)}$-These sorgen zu müssen: Ersteres legt uns nicht auf letztere fest.

Die Missverständnisse in der Sekundärliteratur bezüglich der Bedeutung der Regelfolge-Überlegungen für Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik und Wittgensteins eigenes Beharren auf der SdB$^{(*)}$-These mit ihren unplausibelen Konsequenzen haben sicherlich nicht dazu beigetragen, die Bedenken zu zerstreuen, die seiner so unorthodoxen späten Philosophie der Mathematik von Anfang an entgegen schlugen. Und die neueren Interpretationen, die Wittgenstein in die Nähe einer empiristischen Position bezüglich mathematischer Sätze rücken, drohen gerade die Vorzüge seiner Auffassung gegenüber empiristischen Positionen zu untergraben.

Bei genauerer Betrachtungen hat sich aber heraus gestellt, dass allen potentielle Einwänden gegen Wittgensteins späte Philosophie der Mathematik aus diesen Richtungen begegnet werden kann; sie treffen zumindest nicht den zentralen Kern dieser Position. Es gibt sicherlich Baustellen in Wittgensteins späten Bemerkungen zur Mathematik, insbesondere in seiner Arbeit zu mathematischen Beweisen. Aber es gibt vor allem vieles, worauf sich aufbauen lässt und aus systematischer Sicht hat Wittgenstein Auffassung mathematischer Sätze als Normen der Darstellung für empirische und mathematische Sachverhalte eine völlig neuartige und potentiell sehr fruchtbare Alternative zu bieten.

Literaturverzeichnis

Awodey, S. (2004). An answer to G. Hellman's question "Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?". *Philosophia Mathematica (3) vol. 12*, S. 54–64.

Baker, G. & Hacker, P. M. S. (2009). *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity, Vol. 2 of An Analytical Commentary on the Philosophical Investigations - 2nd edition by P.M.S. Hacker.* Blackwell, Oxford.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review 74*, S. 47–73.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy 70*, S. 661–679.

Buldt, B., Löwe, B., & Müller, T. (Hgg.) (2008). *Towards a New Epistemology of Mathematics.* Special edition in: Erkenntnis 68 (3).

Cozzo, C. (2004). Rule-Following and the Objectivity of Proof. In Coliva, A. & Picardi, E. (Hgg.), *Wittgenstein Today.* Il poligrafo.

Donaldson, S. K. (1983). An application of gauge theory to four-dimensional topology. *Journal of Differential Geometry18 (2)*, S. 279–315.

Dummett, M. (1959). Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. *The Philosophical Review 68 (3)*, S. 324–348.

Dummett, M. (1994). Wittgenstein on Necessity: Some Reflections. In Clark, P. & Hale, B. (Hgg.), *Reading Putnam*, S. 45–65. Blackwell.

Dummett, M. (1996). *Origins of Analytic Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Field, H. (1980). *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*. Princeton University Press.

Fischer, G. (2000). *Lineare Algebra (12. Aufl.)*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Routledge, London/New York.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Verlag von Wilhelm Koebner, Breslau.

Friederich, S. (2011). Motivating Wittgenstein's perspective on mathematical sentences as norms. *Philosophia Mathematica 19*, S. 1–19.

Glock, H.-J. (1996). *A Wittgenstein Dictionary*. Blackwell, Oxford.

Glock, H.-J. (2003). *Quine and Davidson on Language, Thought and Reality*. Cambridge University Press, Cambridge.

Glock, H.-J. (2015a). Meaning and Rule Following. In Wright, J. (Hg.), *International Encyclopedia of Social and Behavioral Sciences*. Elsevier, Amsterdam.

Glock, H.-J. (2015b). The Normativity of Meaning Revisited.

Goldfarb, W. (2012). Rule-Following Revisited. In Ellis, J. & Guevara, D. (Hgg.), *Wittgenstein and the Philosophy of Mind*. Oxford University Press, Oxford/New York.

Hacker, P. & Schulte, J. (Hgg.) (2009). *Ludwig Wittgenstein: Philosophical Investigations. Revised 4th edition by P.M.S. Hacker and Joachim Schulte*. Wiley-Blackwell, Oxford.

Hellman, G. (1996). Structuralism Without Structures. *Philosophia Mathematica 4(2)*, S. 100–123.

Hersh, R. (Hg.) (2006). *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. Springer, New York.

Hintikka, J. (1989). Rules, Games and Experiences: Wittgenstein's Discussion of Rule-Following in the Light of his Development. *Revue Internationale de Philosophie 43*, S. 279–97.

Horsten, L. (2012). Philosophy of Mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL: http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/.*

Kessler, G. (1980). Frege, Mill and the Foundations of Arithmetic. *The Journal of Philosophy 77(2)*, S. 65–79.

Kitcher, P. (1983). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, Oxford/New York.

Kitcher, P. (1988). Mathematical Naturalism. In Aspray, W. & Kitcher, P. (Hgg.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, S. 293–325. University of Minnesota Press, Minneapolis.

Kitcher, P. (1998). Mill, mathematics, and the naturalist tradition. In *The Cambridge Companion to Mill*, S. 57–111. Cambridge University Press, Cambridge.

Kreisel, G. (1958). Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science 9*, S. 135–158.

Kripke, S. A. (1982). *Wittgenstein on Rules and Private Language.* Harvard University Press, Cambridge (M.A.).

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions.* University of Chicago Press.

Kusch, M. (2006). *A Sceptical Guide to Meaning and Rules: Defending Kripke's Wittgenstein.* Acumen.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lakatos, I. (1978). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In Currie, G. & Lakatos, I.and Worrall, J.

(Hgg.), *Philosophical papers, 2 vols.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lakatos, I., Currie, G., & Worrall, J. (Hgg.) (1978). *Mathematics, science, and epistemology, Philosophical papers, 2 vols.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lavor, B. (2008). What can the Philosophy of Mathematics Learn from the History of Mathematics? In Buldt, B., Löwe, B., & Müller, T. (Hgg.), *Towards a New Epistemology of Mathematics*, S. 393–407. Special edition in: Erkenntnis 68 (3).

Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics.* Oxford University Press, USA.

Maddy, P. (2005). Three forms of naturalism. In Shapiro, S. (Hg.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. 437–459. Oxford University Press.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice.* Oxford University Press, Oxford.

Marion, M. (1998). *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics.* Clarendon Press, Oxford.

Mühlhölzer, F. (2005). "A MATHEMATICAL PROOF MUST BE SURVEYABLE" WHAT WITTGENSTEIN MEANT BY THIS AND WHAT IT IMPLIES. *Grazer Philosophische Studien 71*, S. 57–86.

Mühlhölzer, F. (2008). Wittgenstein und der Formalismus. In Kroß, M. (Hg.), *„Ein Netz von Normen“ Ludwig Wittgenstein und die Mathematik*, S. 107–148. Parerga, Berlin.

Mühlhölzer, F. (2010). *Braucht die Mathematik eine Grundlegung?: Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Klostermann, Frankfurt a.M.

Mill, J. (1882). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation, 8th ed.* Harper and Brothers, New York.

Monk, R. (1990). *Ludwig Wittgenstein. the Duty of the Genius.* The Free press, U.S.A.

Paseau, A. (2013). Naturalism in Philosophy of Mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL: http://plato.stanford.edu/entries/naturalism-mathematics/.*

Potter, M. (2011). Wittgenstein on Mathematics. In Kuusela, O. & McGinn, M. (Hgg.), *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, S. 122–137. Oxford University Press, Oxford/New York.

Putnam, H. (1975). Philosophy of Logic. In ders. (Hg.), *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, vol.1.*, S. 323–357. Cambridge University Press, Cambridge (Mass.).

Putnam, H. (1995). Mathematical Necessity Reconsidered. In Leonardi, P. & Satambrogio, M. (Hgg.), *On Quine: New Essays*, S. 267–282. Cambridge.

Quine, W. (1951). Two Dogmas of Empiricism. *The Philosophical Review 60*, S. 20–43.

Quine, W. (1974). *Grundzüge der Logik 13th ed.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Quine, W. (1976). Posits and Reality. In Quine (Hg.), *The Ways of Paradox*, S. 246–254. Harvard University Press, Cambridge (M.A.).

Quine, W. (1980). *From a Logical Point of View, 2nd ed.* Harvard University Press, Cambridge (M.A.).

Quine, W. (1981). Things and Their Place in Theories. In Quine (Hg.), *Theories and Things*, S. 1–23. Harvard University Press, Cambridge (M.A.).

Quine, W. (1984). Review of Charles Parsons' Mathematics in Philosophy. *Journal of Philosophy 81*, S. 783–794.

Quine, W. & Ullian, J. (1970). *The Web of Belief.* Random House, New York.

Ramharter, E. (2015). Wittgenstein on Formulae. In et al., K. B. (Hg.), *Perspectives on Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Grazer Philosophische Studien.

Ramharter, E. & Weiberg, A. (2007). *„Die Härte des logischen Muss", Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Parerga, Berlin.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford.

Schlegel, A.-K. (2015). Mathematik und Empirie beim späten Wittgenstein. *Zeitschrift für philosophische Forschung*.

Schroeder, S. (2006). *Wittgenstein. The Way Out of the Fly-Bottle*. Polity Press, Cambridge/Malden.

Schroeder, S. (2012). Conjecture, Proof, and Sense in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In Jäger, C. & Löffler, W. (Hgg.), *Epistemology: Contexts, Values, Disagreement. Proceedings of the 34th International Ludwig Wittgenstein Symposium in Kirchberg 2011*, S. 461–475. Ontos, Frankfurt.

Schroeder, S. (2015). Mathematical Propositions as Rules of Grammar. In et al., K. B. (Hg.), *Perspectives on Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Grazer Philosophische Studien.

Schulte, J. (2002). WITTGENSTEIN'S NACHLASS: THE BERGEN ELECTRONIC EDITION. *Grazer Philosophische Studien, 65*, S. 237–246.

Schulte, J. e. a. (Hg.) (2001). *Ludwig Wittgenstein: Philosophische Untersuchungen. Kritisch-genetische Edition.* Surhkamp, Frankfurt a. M.

Scorpan, A. (2005). The wild world of 4-manifolds. *American Mathematical Society*.

Searle, J. (1969). *Speech Acts*. Cambridge University Press, Cambridge.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press, Oxford/New York.

Shapiro, S. (Hg.) (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Oxford University Press, Oxford/New York.

Steiner, M. (2005). Mathematics - Application and Applicability. In Shapiro, S. (Hg.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. 625–650. Oxford/New York.

Steiner, M. (2009). Empirical Regularities in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. *Philosophia Mathematica 17(1)*, S. 1–34.

Säätelä, S. (2011). From logical method to 'messing about': Wittgenstein on 'open problems' in mathematics. In Kuusela, O. & McGinn, M. (Hgg.), *The Oxford Handbook of Wittgenstein*, S. 162–180. Oxford University Press, Oxford/New York.

Stroud, B. (1965). Wittgenstein and Logical Necessity. *The Philosophical Review 74(4)*, S. 504–518.

van Kerkhove, B. (Hg.) (2009). *Perspectives on Mathematical Practices – Essays in Philosophy and History of Mathematics.* World Scientific Publishing.

van Kerkhove, B. & van Bendegem, J. (Hgg.) (2002). *Perspectives on Mathematical Practices – Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education.* Springer.

von Wright, G. (1982). The Wittgenstein Papers. In *Wittgenstein.* Blackwell, Oxford.

Weiberg, A. (2008). Rechnung versus Experiment. Mathematische Sätze als grammatische Sätze. In Kroß, M. (Hg.), *„Ein Netz von Normen" Ludwig Wittgenstein und die Mathematik*, S. 17–39. Parerga, Berlin.

Wright, C. (1980). *Wittgenstein on the foundations of mathematics.* Duckworth, London.