Second Erratum à L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II

Ayoub, Joseph

Abstract: This is an erratum to http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2012-0090

DOI: https://doi.org/10.1515/crelle-2013-0101

J. reine angew. Math. **693** (2014), 227–230
DOI 10.1515/crelle-2013-0101

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Second Erratum à

L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II

(J. reine angew. Math. 693 (2014), 151–226)

Par *Joseph Ayoub* à Zürich

Dans cet erratum nous signalons quelques erreurs survenus dans la section 2.4.2 de [1]. Heureursement, ces erreurs n'affectent pas les résultats principaux et, mis à part la proposition 2.53, aucun énoncé n'est à corriger. Par la même occasion, nous apporterons quelques précisions à la preuve du théorème 2.49.

Erratum 1

Il y a une erreur dans l'étape A de la preuve du théorème 2.49. Il y est affirmé à tort que le monomorphisme de Λ-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués

$$\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))) \hookrightarrow \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f^{\mathrm{an}}_*\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))$$

était canonique, i.e., indépendant du choix d'un isomorphisme

$$\mathsf{Bti}^*_C(i^*M) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))[n] \tag{1}$$

induisant l'identité en homologie. Ceci pose un problème lorsqu'on veut passer à la colimite suivant $i \in \mathcal{I}$ pour obtenir un monomorphisme

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))) \hookrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f^{\mathrm{an}}_*\mathsf{Bti}^*_C(i^*M)).$$

Voici comment on peut réparer ce problème. L'isomorphisme (1) induit un isomorphisme de Λ-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués :

$$\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f^{\mathrm{an}}_*\mathsf{Bti}^*_C(i^*M)) \simeq \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))) \oplus \mathsf{R}^1\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_{\bullet+1}(\mathsf{Bti}^*_C(i^*M))). \tag{2}$$

L'auteur a bénéficié du soutien partiel du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 2000201-124737/1.

L'isomorphisme (1) étant bien défini modulo des flèches du type $\mathrm{H}_n(-)[n] \to \mathrm{H}_{n+1}(-)[n+1]$, l'épimorphisme
$$\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(i^*M)) \twoheadrightarrow \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(i^*M))),$$
déduit de la décomposition (2), est canonique. Plus précisément, il est fonctoriel en $\mathsf{Bti}_C^*(i^*M)$. On peut donc prendre sa colimite suivant $i \in \mathscr{I}$ pour obtenir un morphisme surjectif de Λ-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués
$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(i^*M)) \twoheadrightarrow \operatorname*{colim}_{i\in\mathscr{I}} \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(i^*M))).$$
Il est donc bien suffisant de montrer que le morphisme canonique $\Lambda \to p_\sharp \mathsf{R}f_*^{\mathrm{an}}\mathsf{Bti}_C^*(M)$ est inversible et le reste de la preuve reste inchangé. (Voir toutefois la remarque ci-dessous pour un changement à apporter lié à une erreur dans l'énoncé de la proposition 2.53.)

Erratum 2

La proposition 2.53 est incorrecte. On peut obtenir un contre-exemple de la manière suivante. Soit $G = \Sigma_2 \ltimes (\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda \times_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda)$ avec $\Sigma_2 = \{1, \tau\}$, le groupe des permutations de deux lettres, agissant sur $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda \times_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ en permutant les facteurs. Faisons agir $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ par conjugaison sur G via l'inclusion $\iota : \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda = \{1\} \times \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda \hookrightarrow G$. Le sous-groupe $H \subset G$ des points fixes pour cette action, i.e., le centralisateur de $\iota(\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda)$ dans G, est le sous-groupe $H = \{1\} \times (\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda \times_\Lambda \mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda)$.

L'action de $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ sur G fournit une décomposition $\mathcal{O}(G) = \bigoplus_{i\in 2\mathbb{Z}} \mathcal{O}_i(G)$ qui fait de $\mathcal{O}(G)$ une algèbre de Hopf $\mathbb{Z}$-graduée. Le morphisme $\mathcal{O}_\bullet(G) \to \mathcal{O}(H)$ est gradué si l'on place $\mathcal{O}(H)$ en degré zéro. Or, on a $\mathcal{O}(G)^H \simeq \mathcal{O}(G/H) \simeq \mathcal{O}(\Sigma_2) = \hom(\Sigma_2, \Lambda)$. Puisque l'action de $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_2)$ est nécessairement triviale, la graduation sur $\mathcal{O}(G)^H$ induite par celle sur $\mathcal{O}(G)$ est triviale, i.e., $\mathcal{O}_0(G)^H = \mathcal{O}(G)^H$ et $\mathcal{O}_i(G)^H = 0$ pour $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Mais, puisque l'action de $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ sur G est non triviale, l'algèbre de Hopf graduée $\mathcal{O}_\bullet(G)$ n'est pas concentrée en degré zéro. Autrement dit, $A_\bullet = \mathcal{O}_\bullet(G)$ et $B_\bullet = \mathcal{O}(H)$ fournissent un contre-exemple à la proposition 2.53.

Voici un énoncé correct qui suffit pour la preuve du théorème 2.49 (voir la remarque ci-dessous).

Proposition 2.53 corrigée. *Supposons donné un morphisme de Λ-algèbres de Hopf $\mathbb{Z}$-graduées commutatives (au sens gradué !) $A_\bullet \to B_\bullet$ tel que $B_\bullet$ est concentrée en degré zéro, i.e., $B_n = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est naturellement un B_0-comodule. Supposons de plus que le sous-espace vectoriel des B_0-invariants dans A_0 est* $\Lambda \cdot 1$ *et que, pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, le sous-espace vectoriel des B_0-invariants dans A_n est nul. Alors, les A_n sont nuls pour tous les $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, i.e., la Λ-algèbre de Hopf $A_\bullet$ est elle aussi concentrée en degré zéro.*

Démonstration. On explique seulement les corrections et les modifications qu'on doit apporter à la preuve de la proposition 2.53.

Partie A. Le raisonnement de la partie A de la preuve de la proposition 2.53 est essentiellement correct et permet de montrer que l'idéal $J_\bullet \subset A_\bullet$, engendré par les éléments homogènes de degré impair, est nul. Il y a juste une erreur à signaler à la fin de cette partie : nous affirmons à tort que les entiers relatifs i qui apparaissent dans une décomposition de $J^m_\bullet$ en une somme de copies de $(A/J)_\bullet[i]$ sont tous impairs. (Ceci est faux : prendre pour $A_\bullet$ l'algèbre symétrique (au sens gradué) sur le Λ-espace vectoriel gradué $(\Lambda \cdot x_{-1}) \oplus (\Lambda \cdot x_1)$ avec $\deg(x_{-1}) = -1$ et $\deg(x_1) = 1$.)

Voici comment conclure sans supposer que ces entiers i sont impairs. Fixons un entier $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que le $(A/J)_\bullet$-comodule $J^m_\bullet$ contient une copie de $(A/J)_\bullet[i_0]$. Étant donné que $\Lambda[i_0] \subset (A/J)_\bullet[i_0]$ est invariant par la coaction de B_0, il s'ensuit que le sous-espace vectoriel des B_0-invariants dans $J^m_{i_0}$ est non nul. Si $i_0 \neq 0$, ceci est en contradiction directe avec l'hypothèse que le sous-espace des B_0-invariants dans A_{i_0} est nul. Si $i_0 = 0$, l'hypothèse que le sous-espace des B_0-invariants dans A_0 est engendré par l'unité de l'algèbre A_0 entraîne que $1 \in J^m_0$. Ceci est absurde puisque tout élément de $J_\bullet$ est nilpotent (et qu'une algèbre de Hopf n'est jamais nulle).

Partie B. La partie B de la preuve de la proposition 2.53 contient deux erreurs.

La première erreur est irréparable et explique pourquoi l'énoncé de la proposition 2.53 est incorrect. Il s'agit d'une mauvaise interprétation des hypothèses de l'énoncé. En effet, la nullité des sous-espaces vectoriels des B_0-invariants dans A_n, pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, équivaut au fait que $\mathbb{G}\mathrm{m}_\Lambda$ agit par l'identité sur $\mathcal{O}(G/H)$ mais ne dit rien sur $\mathcal{O}(G/H)$ lui-même. Il est donc nécessaire de supposer que le sous-espace vectoriel des B_0-invariants dans A_0 est $\Lambda \cdot 1$ pour avoir l'égalité $\mathcal{O}(G/H) = \Lambda$.

La seconde erreur est réparable. Nous avons affirmé à tort que le schéma G/H est affine. Or, l'inclusion $G/H = \tilde{G}/\tilde{H} \hookrightarrow \mathbb{G}\ell(n)_\Lambda/R$, construite à la fin de la partie B de la preuve de la proposition 2.53, est à priori seulement une immersion localement fermée. On peut donc seulement conclure que G/H est quasi-affine. Heureusement, joint au fait que $\mathcal{O}(G/H) = \Lambda$, ceci suffit pour conclure que $G = H$. □

Remarque. La proposition 2.53 intervient seulement dans l'étape A de la preuve du théorème 2.49. Expliquons pourquoi la version corrigée ci-dessus est suffisante. La version corrigée nous ramène à vérifier que le sous-espace vectoriel des invariants pour la coaction de $\mathcal{C}^0_f(\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c), \Lambda)$

(a) sur $\mathrm{H}_0(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)))$ est $\Lambda \cdot 1$;

(b) sur $\mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*(\mathcal{F}_{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)))$ est nul pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Or, dans l'étape A de la preuve du théorème 2.49, nous justifions (b) en démontrant que le morphisme
$$\Lambda \to \Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*_C(\phi_{c*}\Lambda))),$$
induit par l'unité de l'algèbre $\phi_{c*}\Lambda$, est inversible. Mais ceci permet aussi de justifier (a).

Précisions. On termine par quelques précisions sur la preuve du théorème 2.49.

(1) Dans l'étape B, pour démontrer que V_2 est l'image du morphisme (44), on peut raisonner de la manière suivante. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le sous-espace des invariants dans $(\mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*_C(M)))_c$ pour l'action de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ est égal à l'image du morphisme évident
$$\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*_C(M))) \hookrightarrow (\mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}^*_C(M)))_c.$$

En utilisant un isomorphisme

$$\mathsf{Bti}_C^*(M) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n(\mathsf{Bti}_C^*(M))[n]$$

induisant l'identité sur l'homologie (cf. le lemme 2.52), on déduit aussitôt que le morphisme de Λ-espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathsf{Bti}_C^*(M))) \to (\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(M)))_c$$

induit une surjection entre $\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{R}\Gamma(C^{\mathrm{an}}, \mathsf{Bti}_C^*(M)))$ et le sous-espace des invariants sous l'action de $\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)$ sur $(\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}_C^*(M)))_c$. Or, la source de ce morphisme s'identifie canoniquement à $\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\phi_c^*(f_* f^* M)))$ et son but s'identifie à $\mathrm{H}_\bullet(\mathsf{Bti}^*(\phi_c^*(M)))$.

(2) Il n'est pas suffisant, pour les besoins de l'étape D, de seulement noter que le carré de l'étape C est cartésien. En fait, ce qui compte pour la suite est de savoir que ce carré induit un isomorphisme de Λ-schémas discrets

$$\pi_1(C^{\mathrm{an}}, c)/\pi_1(\widetilde{C}^{\mathrm{an}}, \tilde{c}) \simeq \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)/\,\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda).$$

Ceci s'obtient en adaptant la preuve du lemme 2.30 qui fournit alors les propriétés suivantes.

(a) Le morphisme canonique $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda) \to \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ est injectif.

(b) $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ s'identifie au stabilisateur de « l'évaluation en $\tilde{c}$ » pour l'action de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$ sur la cohomologie de la fibre $(r^{\mathrm{an}})^{-1}(c)$ qui est égale à $\Lambda^{(r^{\mathrm{an}})^{-1}(c)}$.

(c) Le quotient $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)/\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ s'identifie au schéma discret $\mathrm{Spec}(\Lambda^{(r^{\mathrm{an}})^{-1}(c)})$ dont l'ensemble des Λ-points est $(r^{\mathrm{an}})^{-1}(c)$.

(3) Dans l'étape D, on affirme que $H \cap \bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ est un sous-groupe strict de $\bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$. Expliquons comment justifier cette assertion. D'après (2), pour tout revêtement étale $r : \widetilde{C} \to C$ et $\tilde{c} \in r^{-1}(c)$, le morphisme

$$H \to \Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)/\,\Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$$

est surjectif. Cette propriété reste vraie après passage à la limite suivant $(\widetilde{C}, \tilde{c})$. Il s'ensuit donc un isomorphisme de Λ-schémas pro-finis

$$\frac{H}{H \cap \bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)} \xrightarrow{\sim} \frac{\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)}{\bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)}.$$

Ainsi, puisque H est un sous-groupe strict de $\Pi_1^{\mathrm{mot}}(C, c, \Lambda)$, l'isomorphisme précédant montre que $H \cap \bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$ est aussi un sous-groupe strict de $\bigcap_{(\widetilde{C},\tilde{c})} \Pi_1^{\mathrm{mot}}(\widetilde{C}, \tilde{c}, \Lambda)$.

Références

[1] *J. Ayoub*, L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II, J. reine angew. Math. **693** (2014), 151–226.

Joseph Ayoub, Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Switzerland
e-mail: joseph.ayoub@math.uzh.ch

Eingegangen 24. September 2013