



**University of  
Zurich**<sup>UZH</sup>

**Zurich Open Repository and  
Archive**

University of Zurich  
University Library  
Strickhofstrasse 39  
CH-8057 Zurich  
[www.zora.uzh.ch](http://www.zora.uzh.ch)

---

Year: 2018

---

## **Biliardi matematici, caos e ciambelle “infinite”: perché imatematici “giocano” a biliardo, dai poligoni al modello di Ehrenfest**

Ulcigrai, Corinna

**Abstract:** I biliardi matematici sono un’idealizzazione del gioco del biliardo. Molti modelli di sistemi fisici, ad esempio in meccanica e termodinamica, sono rappresentati da biliardi matematici. Dal punto di vista matematico, i biliardi costituiscono anche un modello molto ricco di comportamento caotico. Le proprietà matematiche che caratterizzano diversi gradi di caos dipendono fortemente dalla forma del tavolo da biliardo. In questo articolo introduttivo sui biliardi esploreremo soprattutto il comportamento delle traiettorie in certi biliardi poligonali (razionali), sia finiti che infiniti (come il famoso modello di Ehrenfest) e cercheremo di dare un’idea degli strumenti matematici usati per studiarli, dallo srotolamento alla rinormalizzazione. Mathematical billiards are an idealization of the game of pool. Many systems in physics, for example in mechanics or thermodynamics, can be described by mathematical billiards. Billiards provide also a mathematical model of chaotic behaviour, which may display several different chaotic features. How much chaotic a billiard is, depends mostly on the shape of the billiard table. In this introductory article on billiards we will focus especially on the behaviour of trajectories in a class of polygonal billiards (rational ones), both bounded and infinite (such as the well known Ehrenfest model). We will try to convey some of the mathematical tools which were used to study chaotic features, such as unfolding and renormalization.

Posted at the Zurich Open Repository and Archive, University of Zurich

ZORA URL: <https://doi.org/10.5167/uzh-184636>

Journal Article

Published Version

Originally published at:

Ulcigrai, Corinna (2018). Biliardi matematici, caos e ciambelle “infinite”: perché imatematici “giocano” a biliardo, dai poligoni al modello di Ehrenfest. *Matematica, cultura e società*, 3(1):13-30.

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

CORINNA ULCIGRAI

## **Biliardi matematici, caos e ciambelle “infinite”: perché i matematici “giocano” a biliardo, dai poligoni al modellodi Ehrenfest**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3*  
(2018), n.1, p. 13–30.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2018\\_1\\_3\\_1\\_13\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2018_1_3_1_13_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# Biliardi matematici, caos e ciambelle “infinite”: perché i matematici “giocano” a biliardo, dai poligoni al modello di Ehrenfest

CORINNA ULCIGRAI

University of Bristol

E-mail: corinna.ulcigrai@bristol.ac.uk

**Sommario:** *I biliardi matematici sono un’idealizzazione del gioco del biliardo. Molti modelli di sistemi fisici, ad esempio in meccanica e termodinamica, sono rappresentati da biliardi matematici. Dal punto di vista matematico, i biliardi costituiscono anche un modello molto ricco di comportamento caotico. Le proprietà matematiche che caratterizzano diversi gradi di caos dipendono fortemente dalla forma del tavolo da biliardo. In questo articolo introduttivo sui biliardi esploreremo soprattutto il comportamento delle traiettorie in certi biliardi poligonali (razionali), sia finiti che infiniti (come il famoso modello di Ehrenfest) e cercheremo di dare un’idea degli strumenti matematici usati per studiarli, dallo srotolamento alla rinormalizzazione.*

**Abstract:** *Mathematical billiards are an idealization of the game of pool. Many systems in physics, for example in mechanics or thermodynamics, can be described by mathematical billiards. Billiards provide also a mathematical model of chaotic behaviour, which may display several different chaotic features. How much chaotic a billiard is, depends mostly on the shape of the billiard table. In this introductory article on billiards we will focus especially on the behaviour of trajectories in a class of polygonal billiards (rational ones), both bounded and infinite (such as the well known Ehrenfest model). We will try to convey some of the mathematical tools which were used to study chaotic features, such as unfolding and renormalization.*

## 1. – Sistemi caotici ed effetto farfalla.

Perché le previsioni del tempo sono spesso sbagliate? Il moto delle correnti atmosferiche è un esempio di sistema *caotico*, di cui è difficile prevedere l’evoluzione futura. Di definizioni matema-

tiche di *caos* ne esistono più d’una, come esistono vari concetti matematici che esprimono *quanto* caotico è un sistema. Una delle proprietà che però viene inclusa in tutte le definizioni di *caos* è la *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*, più conosciuta dal grande pubblico come *l’effetto farfalla*: “un battito di ali di una farfalla in Brasile, può causare un uragano in Texas”. Questa immagine, attribuita al meteorologo e matematico

---

Accettato: il 19 aprile 2018.

Edward Lorentz<sup>(1)</sup>, esemplifica il concetto di dipendenza sensibile: cambiando appena le condizioni iniziali di un sistema (variando le correnti di un “battito d’ali”), si possono creare nel tempo ripercussioni macroscopiche drammatiche (l’uragano dall’altra parte del mondo).

Un sistema fisico o modello matematico descritto da equazioni matematiche deterministiche non ha intrinsecamente nulla di *casuale*: parafrasando le parole di Pierre-Simone Laplace, un’intelligenza che conoscesse tutte le condizioni iniziali e tutte le equazioni che lo governano, dovrebbe essere in grado di prevedere tutta l’evoluzione futura. Se però c’è di mezzo l’effetto farfalla, diventa spesso realisticamente impossibile predirne il comportamento al passare del tempo.

Per fortuna *non tutto il caos viene per nuocere*: se riusciamo a stabilire *a priori* che un sistema gode di certe proprietà matematiche di caos (come *ergodicità* o *mescolamento*), queste aiutano a prevedere il comportamento *statistico*: anche se non sappiamo dire esattamente cosa succederà ad un dato istante ad una precisa condizione iniziale, possiamo prevedere cosa succederà *in media*, per una condizione iniziale *tipica*. Vediamo cosa questo significa in un *semplice* modello (da descrivere, ma come vedremo non sempre da studiare!), quello del *biliardo*.

## 2. – Biliardi matematici.

Vari modelli di sistemi caotici, molti dei quali derivano da sistemi fisici, sono descritti da *biliardi matematici*. Un *biliardo matematico* è un’idealizzazione del gioco del biliardo. Se colpiamo con la stecca una palla su un tavolo di biliardo, la palla si muove

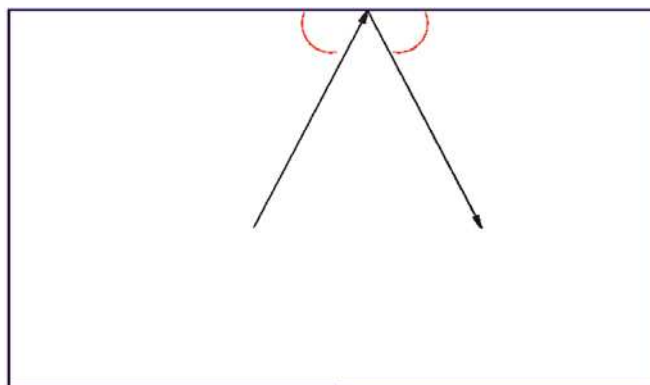


Fig. 1. – Riflessione al bordo: la legge dell’ottica geometrica.

lungo una traiettoria rettilinea finché urta i bordi del tavolo (o un’altra palla, ma per semplicità supponiamo che ci sia una palla sola). Poi, come ben sanno i giocatori di biliardo, viene *riflessa* dal bordo del tavolo secondo la legge dell’ottica geometrica (come illustrato nella figura 1): l’angolo di incidenza (formato dalla palla col bordo tavolo prima dell’urto) è uguale all’angolo di riflessione (formato dalla palla col bordo dopo l’urto).

Se immaginate ora che la palla sia un punto senza massa e che il tavolo sia privo di attrito, la “palla” continuerà a muoversi alla stessa velocità senza mai rallentare. Ai matematici (ben diversamente dai giocatori di biliardo!) interessano solo le palle che non vanno mai a cadere nella buca: in questo caso il punto-palla continuerà a descrivere una traiettoria infinita. Questa è una traiettoria di un biliardo matematico (vedi ad esempio la figura 2).

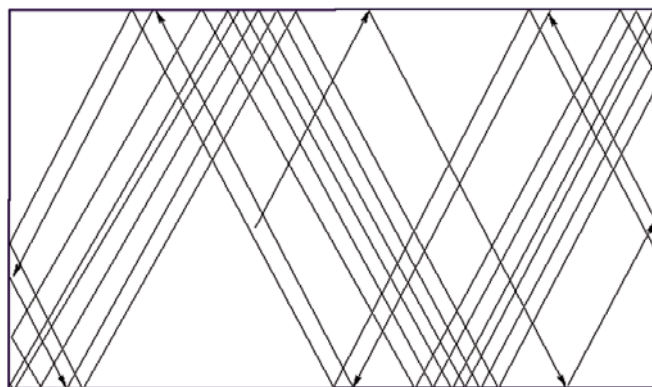


Fig. 2. – Una traiettoria del biliardo matematico.

<sup>(1)</sup> In realtà pare che questa immagine sia stata suggerita dal meteorologo Philip Merilees come titolo del seminario tenuto da Lorentz nel 1972 al 139th incontro dell’American Association for the Advancement of Science. Il seminario presentava le scoperte esposte da Lorentz nell’articolo titolato più prosaicamente *Deterministic Nonperiodic Flow*. Il termine “effetto farfalla” è poi comparso solo successivamente, nel best seller del 1987 scritto da James Gleick, *Chaos: Making a New Science*.

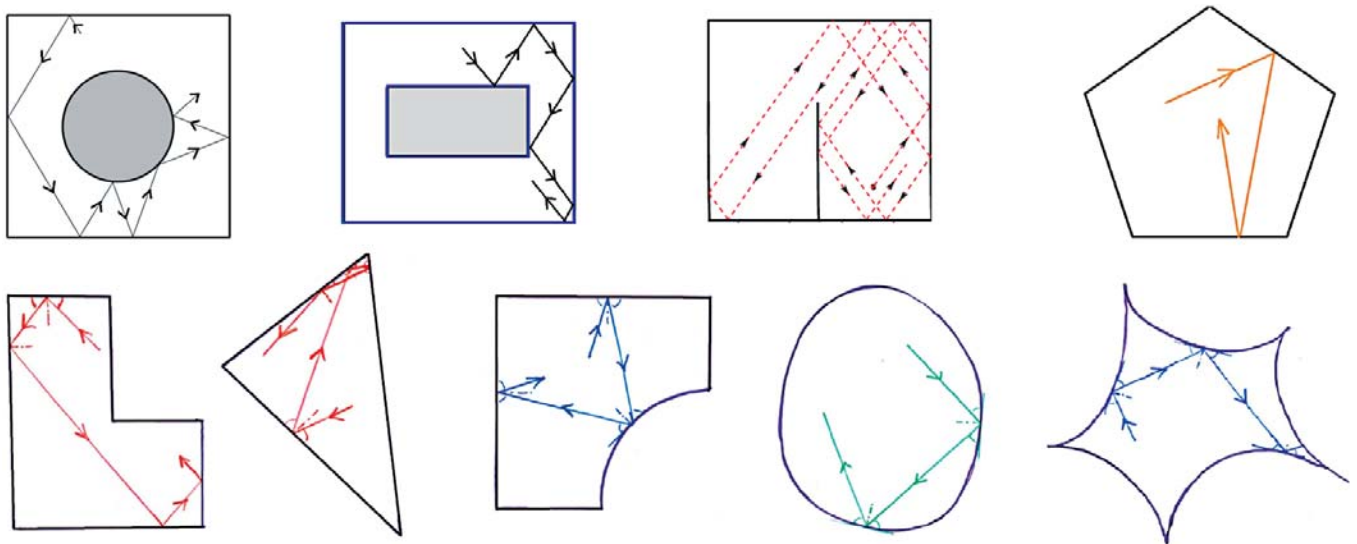


Fig. 3. – Esempi di biliardi piani: tavoli rettangolari con ostacoli (circolare o rettangolare) o barriera, tavoli poligonali e con bordo convesso o concavo.

Oltre al classico tavolo rettangolare, il tavolo da biliardo può avere altre forme (e come scopriremo nella sezione 7), giocare a biliardo in un rettangolo è piuttosto “noioso” dal punto di vista matematico). Vari esempi di “tavoli” sono illustrati in figura 2: ad un tavolo rettangolare si possono aggiungere degli *ostacoli*, ad esempio un cerchio o un rettangolo, o delle *barriere* che riflettono le traiettorie. O si può giocare a biliardo in altri tavoli *poligonali*. In questo articolo considereremo solo biliardi piani, in cui il tavolo  $D$  è un sottoinsieme del piano  $\mathbb{R}^2$  (un dominio il cui bordo è liscio a tratti), ma il tavolo può avere forme con parti convesse o concave e tra poco incontreremo anche tavoli infiniti (si vedano le sezioni 3 e 6).

Possiamo chiederci per esempio se la traiettoria della nostra palla sarà periodica (cioè si chiuderà dopo un numero finito di urti, come succede per esempio in figura 4 dopo quattro riflessioni).

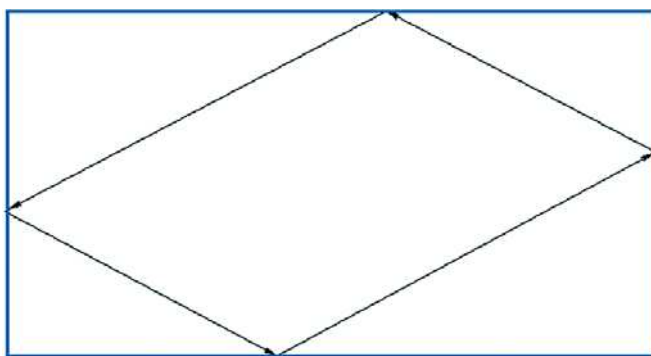


Fig. 4. – Una traiettoria chiusa (o periodica).

Oppure chiederci se invece la traiettoria sarà *densa*, cioè passerà arbitrariamente vicina ad ogni punto del tavolo. E se è densa, possiamo voler sapere se è equidistribuita, cioè se riempie in maniera uniforme il tavolo (una definizione più rigorosa è data in sezione 8). Un esempio di traiettoria densa ma non uniformemente distribuita in un tavolo con una barriera è illustrato in figura 5.

È facile convincersi che il moto nel biliardo è soggetto all’effetto farfalla: per esempio possiamo costruire esempi di traiettorie parallele di “palle” che sono inizialmente arbitrariamente vicine, ma urtano un angolo del tavolo da lati opposti, o tali che una urta una barriera e l’altra no (si veda ad esempio la figura 9(b)). Così, traiettorie che differiscono di poco nella condizione iniziale, si separano macroscopica-

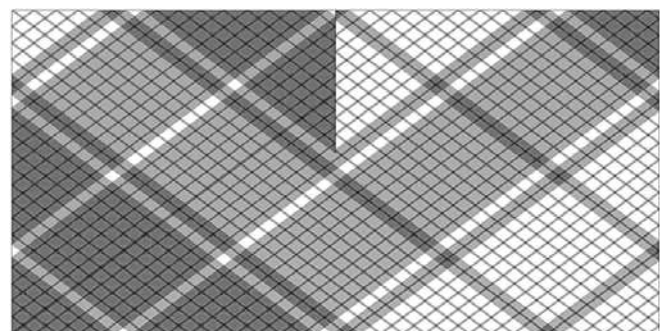


Fig. 5. – Una traiettoria densa ma non equidistribuita in un tavolo rettangolare con una barriera (si ringrazia John Smillie per avere gentilmente prodotto quest’immagine).

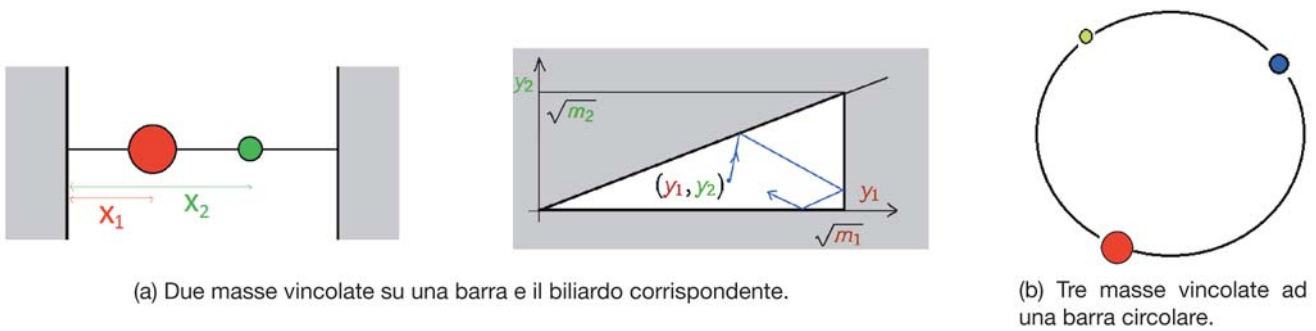


Fig. 6. – Esempi di sistemi meccanici elastici il cui moto è descritto da un biliardo in un triangolo.

mente. Se non sappiamo con precisione la posizione e velocità iniziale della “palla”, la posizione dopo molti urti col tavolo diventa imprevedibile, così come il comportamento qualitativo della traiettoria (come ad esempio se è periodica o densa). Nonostante tutto, per molte classi di biliardi matematici (alcune descritte nelle sezioni 5 e 8, si veda sezione 9) è possibile dimostrare che se prendiamo una condizione iniziale a caso, la traiettoria sarà densa e anche uniformemente distribuita. In particolare esempi come quello in figura 5 sono rari (hanno *misura* nulla).

### 3. – I biliardi nella fisica.

Perché studiare quest’idealizzazione matematica del biliardo? non certo per giocare meglio al vero biliardo (in particolare visto che vengono ignorate le buche!). Intanto la legge che descrive il moto del biliardo è fondamentale sia in ottica e in acustica, visto che sia i raggi di luce che le onde acustiche (più precisamente il loro fronte d’onda) viaggiano lungo traiettorie di biliardo. Meno ovvio è che ci sono molti modelli in fisica, ad esempio in termodinamica, ma anche in meccanica classica, che sono descritti da biliardi piani. Ad esempio, è un’esercizio di meccanica classica dimostrare che il moto dei due sistemi elastici di palle vincolate a una barra, illustrati in figura 6(a), è descritto dal moto di una palla-punto in un biliardo triangolare<sup>(2)</sup>.

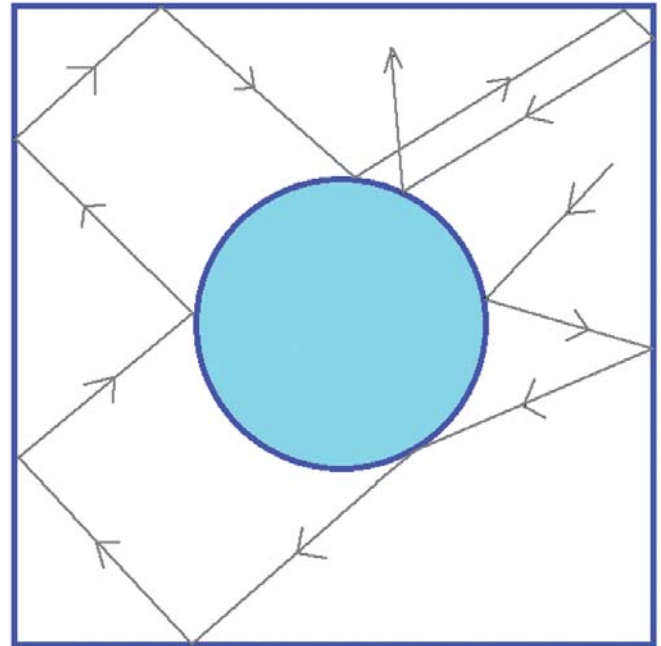


Fig. 7. – Il biliardo di Sinai.

Il tavolo quadrato con un ostacolo circolare in figura 7 è noto come *biliardo di Sinai* e costituisce un esempio basilare in termodinamica: il moto (relativo) di due particelle circolari di raggio  $r > 0$  (trattate come *hard spheres*) che collidono elasticamente è descritto dalla riflessione della traiettoria del biliardo su un ostacolo circolare (di raggio  $2r$ ). Un altro modello molto studiato sia da fisici che matematici è il *gas di Lorentz* (che non prende il

<sup>(2)</sup> L’esempio delle due masse  $m_1, m_2$  vincolate ad una barra come in figura 6(a) e soggette a urti elastici fra loro e alle pareti è trattato in dettaglio nel libro [26]. Le coordinate  $x_1, x_2$  e le velocità  $x'_1, x'_2$  delle due masse, dopo avere effettuato il cambio di coordinate  $y_1 = \sqrt{m_1}x_1, y_2 = \sqrt{m_2}x_2$ , sono descritte dal moto del punto  $(y_1, y_2)$  con velocità  $(y'_1, y'_2)$  in un biliardo che è un triangolo rettangolo i cui lati e angoli dipendono dalle masse  $m_1, m_2$ . La riduzione del sistema di tre masse elastiche in Figura 6(b) ad un biliardo in un triangolo acutangolo è l’oggetto dell’articolo [11].

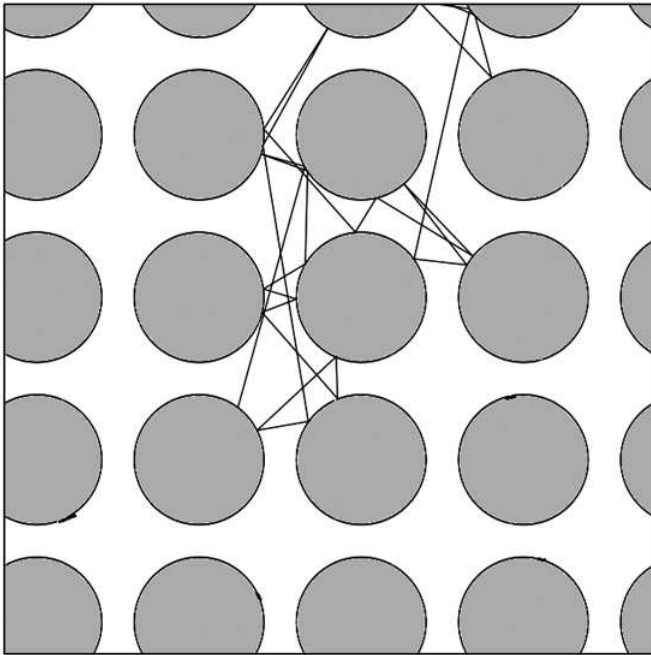


Fig. 8. – Un esempio di gas di Lorentz (nella versione periodica).

nome dal Lorentz dell'effetto farfalla, ma bensì dal fisico Hendrick Lorentz, Premio Nobel per la Fisica nel 1902). Il modello di Lorentz è un biliardo infinito, in cui si “gioca” su tutto il piano, su cui sono stati piazzati degli ostacoli circolari su cui la “palla” rimbalza come in un flipper infinito. La versione periodica del gas di Lorentz, che è illustrata in figura 8, fornisce per esempio un modello del moto di un elettrone (la palla) all'interno di un metallo, i cui atomi (gli ostacoli) sono disposti periodicamente nello spazio.

L'introduzione dei biliardi come modelli del comportamento della materia può poi costituire il punto di partenza di una delle sfide della fisica matematica, quella di ricavare le leggi macroscopiche della termodinamica e della meccanica statistica a partire da modelli microscopici e deterministici<sup>(3)</sup>.

<sup>(3)</sup> Nel caso del modello di Lorentz, se si fa tendere il diametro degli ostacoli a zero (ad esempio studiando il così detto *limite di Boltzmann-Grad*) si possono ritrovare generalizzazioni dell'equazione di Boltzmann in teoria cinetica dei gas (come illustrato ad esempio nell'ICM address di Marklof [19]). Un'altro esempio sono i biliardi di Sinai con più ostacoli, che sono stati proposti come modelli da cui ricavare la legge del calore (si veda ad esempio a proposito il contributo di Liverani [18] per l'ICM 2018).

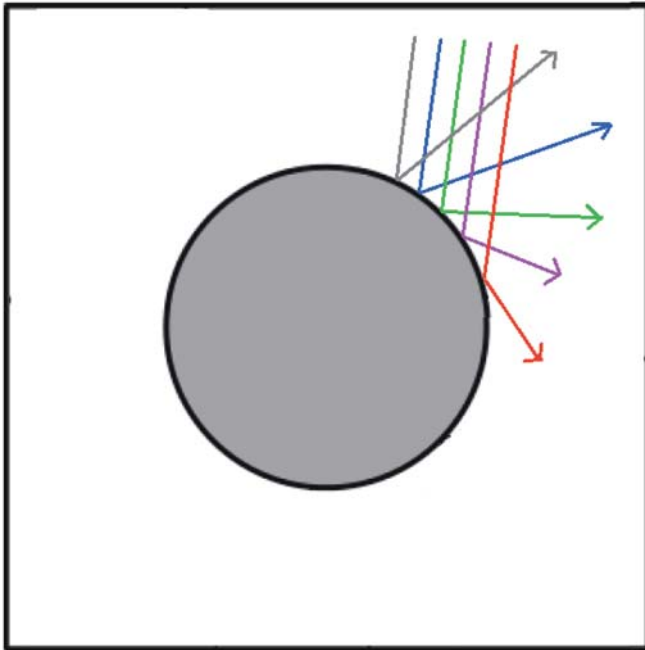
Oltre alle motivazioni fisiche, però, i biliardi sono studiati anche e proprio perché offrono un modello matematico per il *caos*, o meglio *i* (tipi diversi di) caos. I biliardi matematici sono infatti studiati come *sistemi dinamici* (sistemi che evolvono nel tempo e di cui si studia l'evoluzione futura, spesso caotica appunto) e sono interessanti in parte perché possono esibire una grande varietà di tipi di comportamento caotico. Individuare le proprietà caotiche di cui godono e i meccanismi che le causano è spesso una sfida matematica che porta a sviluppare nuovi strumenti e teorie e a comprendere meglio il caos dal punto di vista matematico.

#### 4. – Caos lento: quadrato contro cerchio.

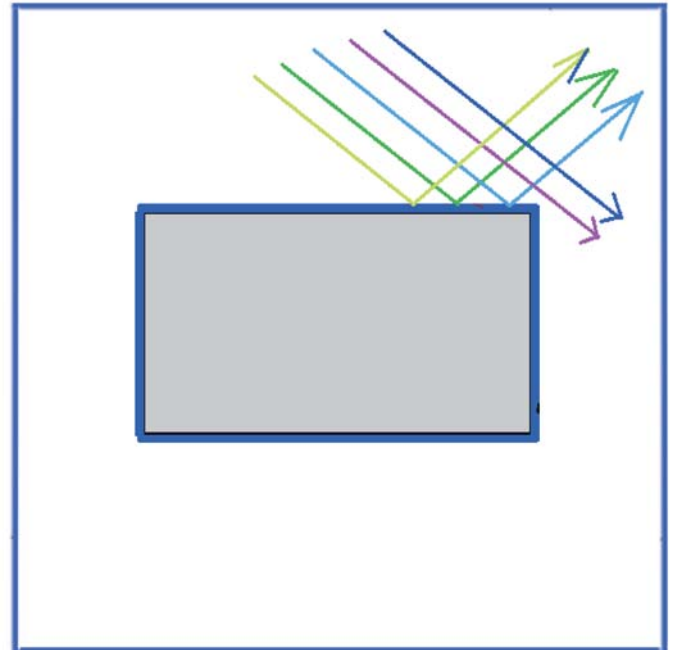
È giunta l'ora di spiegare perché *non tutti i caos sono uguali*. Ritorniamo all'effetto farfalla, che ci dice che le traiettorie di due punti vicini spesso *divergono*. Passando da un punto di vista qualitativo ad uno quantitativo, possiamo chiederci *quanto velocemente divergono*. I sistemi dinamici sono classificati (un po' grossolanamente) in tre categorie, caratterizzate (tra le altre proprietà) dalla velocità di divergenza (infinitesima) di condizioni iniziali vicine. La divergenza avviene a velocità *esponenziale* nei sistemi chiamati *iperbolici*. Questi sono i più caotici, e anche i meglio compresi. Le fondamenta della teoria dei sistemi iperbolici risalgono agli anni Sessanta-Settanta, e sono state gettate dai contributi di grandi matematici russi tra cui Anosov, Kolmogorov e Sinai (quest'ultimo proprio studiando il suo omonimo biliardo, oltre a tanti altri sistemi). Se invece la divergenza avviene più lentamente, a velocità *polinomiale* o più in generale sub-esponenziale, si parla di sistemi dinamici *parabolici*. Infine, nei sistemi cosiddetti *ellittici* non c'è divergenza (né dunque effetto farfalla) e le traiettorie rimangono vicine.

Nei biliardi, il comportamento delle traiettorie e le proprietà caotiche sono fortemente influenzate dalla *forma* del tavolo. Confrontiamo per esempio un tavolo quadrato con un ostacolo *circolare* (il biliardo di Sinai) con uno con un ostacolo *quadrato*. Se inviamo contro l'ostacolo circolare un fascio di traiettorie vicine e parallele, dopo la riflessione non saranno più parallele, ma divergeranno come illustrato





(a) *Scattering* di un fascio di traiettorie parallele nel biliardo di Sinai.



(b) Divergenza di traiettorie vicine e parallele nel biliardo di Ehrenfest.

Fig. 9. – Meccanismi che causano l'effetto farfalla nei biliardi di Sinai e di Ehrenfest.

in figura 9(a). Questo meccanismo, noto in inglese come *scattering* o *defocusing mechanism*, è causato dalla convessità dell'ostacolo e fa sì che le traiettorie divergano velocemente. Il *defocusing* (o "sfocatura") delle traiettorie è stato sfruttato da Yakov Sinai per dimostrare che il "suo" biliardo è iperbolico e ha forti proprietà caotiche<sup>(4)</sup>, uno dei risultati che sono valsi a Sinai l'assegnazione del premio Abel nel 2014. Se invece l'ostacolo è quadrato, traiettorie vicine e parallele rimangono parallele dopo un'urto, a meno che una non "manchi" l'ostacolo e l'altra no, come illustrato in figura 9(b). In questo caso, l'unico meccanismo di separazione delle traiettorie è legato alla presenza degli *angoli* (che creano discontinuità nel flusso del biliardo). La velocità di separazione delle traiettorie in questo caso è molto più lenta, spesso polinomiale (per questo i biliardi poligonali sono esempi di sistemi parabolici con singolarità).

<sup>(4)</sup> In particolare, il biliardo di Sinai (così come i biliardi iperbolici in generale) è ergodico, mixing, ha entropia positiva ed è un flusso di Kolmogorov (o K-flow).

## 5. – Tanti tavoli, tanti tipi di caos.

Data la diversa natura del comportamento delle traiettorie a seconda della *convessità* (o meno) del *bordo*, lo studio dei biliardi è collegato ad aree diverse della matematica in generale e dei sistemi dinamici in particolare. I biliardi con tratti di bordo *concavi* (come l'ostacolo del biliardo di Sinai, visto *dall'interno* del biliardo) sono studiati con tecniche di dinamica iperbolica<sup>(5)</sup>.

Quando il bordo è invece *convesso* (ad esempio se giochiamo a biliardo in un cerchio o in un ellisse), la dinamica è molto poco caotica (spesso *ellittica*) e si può dimostrare l'esistenza di molte traiettorie pe-

<sup>(5)</sup> Esempi di biliardi iperbolici possono essere realizzati anche attraverso componenti del bordo *convesse*. Un esempio famoso è lo *stadio di Bunimovich*, il cui tavolo è ottenuto unendo ad un rettangolo due semicerchi come illustrato in figura 10. Anche se le pareti semicircolari concentrano e fanno convergere le traiettorie, Bunimovich ha dimostrato che il biliardo nello stadio è iperbolico, perché le traiettorie che vengono *concentrate* verso il fuoco, hanno poi tempo di divergere e separarsi di nuovo nel "canale" rettangolare.

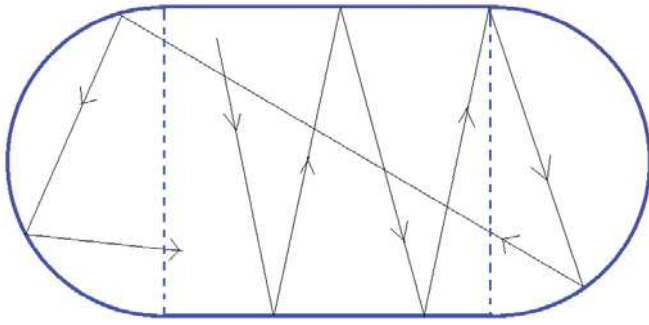


Fig. 10. – Lo stadio di Bunimovich.

riodiche e di regioni che *intrappolano* le traiettorie, come in figura 11 (si veda ad esempio [26] o [12]). Le tecniche usate in questo caso sono legate al calcolo delle variazioni, alla teoria KAM e alla dinamica Hamiltoniana.

I biliardi *poligonali*, il cui bordo è lineare a tratti (quindi né concavo né convesso) costituiscono una via di mezzo: più caotici di quelli convessi, meno di quelli iperbolici (hanno per esempio entropia nulla), possono essere considerati modelli di *caos lento*. Lo studio di certi biliardi poligonali (in particolare quelli *razionali*, definiti in sezione 8) ha visto molti progressi a partire dagli anni Ottanta, grazie alle connessioni con un'area detta *dinamica di Teichmüller*. Molti vincitori della medaglia Fields (per molti il premio più ambito dai matematici), come Artur Avila, Curt McMullen, Jean-Christophe Yoccoz e l'unica donna che ha per ora ricevuto quest'onore, Maryam Mirzakhani, hanno lavorato in quest'area e contribuito alla teoria dei biliardi razionali.

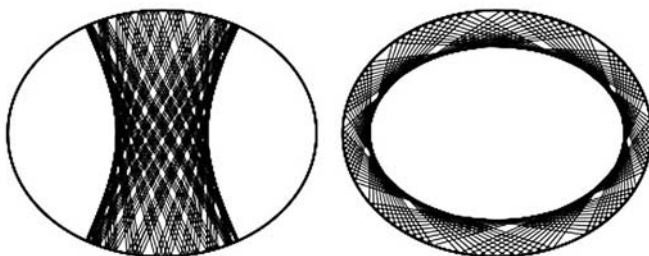


Fig. 11. – Traiettorie del biliardo in un'ellisse, *intrappolate* in una regione delimitata da una *caustica* che è un'ellisse o un'iperbole (si ringrazia Carl Dettmann).

## 6. – Ehrenfest contro Lorentz.

Un esempio curioso di come cambiare un cerchio in un quadrato può fare molta differenza ci è offerto da due famosi biliardi infiniti. Abbiamo già descritto il modello periodico del gas di Lorentz, un biliardo infinito con ostacoli circolari periodicamente ripetuti (vedi Figura 8). Nel 1912, poco dopo che Lorentz ebbe suggerito questo modello nel 1905, i fisici Paul e Tatjana Ehrenfest suggerirono un modello in cui gli ostacoli circolari erano rimpiazzati da *rettangoli* (vedi figura 12 per la versione periodica del biliardo di Ehrenfest). Speravano così di ottenere un modello più semplice da studiare, ma la storia si è rivelata ben diversa. A riguardo del modello di Lorentz, sono stati dimostrati molti risultati matematici a partire in particolare dagli anni Settanta (anche grazie al contributo di vari fisici matematici italiani, tra cui Gallavotti e Boldrighini, mentre recenti svolte sulla comprensione del modello periodico nel limite di Boltzmann-Grad – in cui gli ostacoli tendono a zero – sono state dimostrate da miei colleghi a Bristol, in particolare J. Marklof e B. Toth; rimandiamo a [5] per le referenze bibliografiche). Invece, sul modello periodico degli Ehrenfest, studiato per primo da Hardy e Weber nel 1932, si sapeva ben poco dal punto di vista rigoroso. Anche le simulazioni numeriche, che pure sono state spesso tentate, sono elusive, proprio per la natura *lenta* del caos in questi biliardi (che rende di difficile convergenza numerica gli algoritmi di simulazione). Negli ultimi anni, però, sono stati dimostrati numerosi risultati sul modello

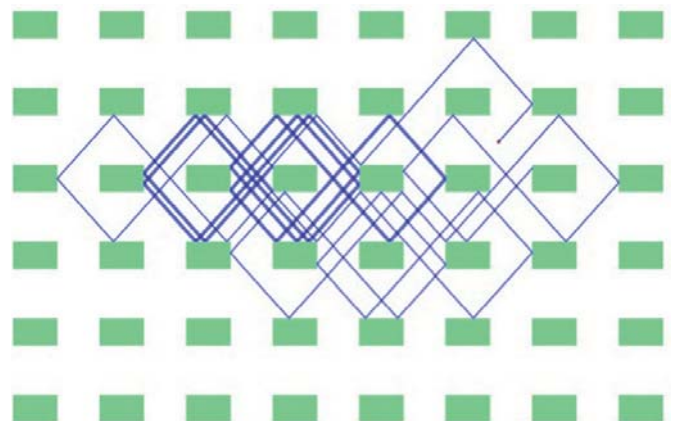


Fig. 12. – Traiettorie del biliardo nel modello periodico di Ehrenfest (immagine prodotta da Vincent Delecroix).

di Ehrenfest periodico e su altri biliardi poligonali periodici (ad esempio in [1, 2, 3, 6, 7]) ed il loro studio è un'area di ricerca molto attiva e in rapida evoluzione.

Una domanda naturale dal punto di vista fisico è per esempio quale è la velocità di *diffusione*, cioè con che velocità una traiettoria tipica esplora lo spazio. È ben noto (almeno ad ogni probabilista) che se un ubriaco si muove linearmente sul piano, svoltando in modo casuale ogni minuto a Nord, Est, Sud o Ovest, ciascuno con probabilità  $1/4$  (cioè se consideriamo una *marcia aleatoria* sugli interi  $\mathbb{Z}^2$  del piano), dopo  $n$  minuti l'ubriaco si troverà quasi sicuramente a una distanza di ordine  $\sqrt{n}$  dal punto iniziale (segue dal Teorema del Limite Centrale e si parla in questo caso di diffusione *normale*). Questa è anche la velocità a cui una traiettoria tipica esplora lo spazio nel gas di Lorentz (assumendo che l'*orizzonte* sia finito, si veda ad esempio il survey [5]).

La traiettoria di una palla nel biliardo di Ehrenfest, invece, esibisce un comportamento ben diverso, come è stato dimostrato recentemente da Delecroix, Hubert e Lelièvre (in [3]): dopo  $n$  minuti, la distanza dal punto iniziale di una traiettoria tipica è di ordine<sup>(6)</sup>  $n^{2/3}$ . Questo comportamento si chiama *super-diffusivo* (perché  $2/3 > 1/2$  dove  $1/2$  è l'esponente di diffusione in  $\sqrt{n} = n^{1/2}$ ). Vari lavori in corso studiano le velocità di diffusione al variare del tipo di ostacoli (si veda ad esempio [2] e mostrano che è possibile ottenere altri tassi di diffusione, sia *super* che *sub-diffusivi*). È stato anche dimostrato (in [1]) che la traiettoria tipica è *ricorrente*, cioè ritorna infinite volte arbitrariamente vicino al punto di partenza.

Contrariamente a quanto accade nel gas di Lorentz e a quanto ci si aspettava, però, in un lavoro recente che ho ottenuto in collaborazione con Krzysztof Frączek, abbiamo dimostrato che nel modello di Ehrenfest non esiste *nessuna* traiettoria densa nel tavolo da biliardo infinito (più dettagli in sezione 9).

<sup>(6)</sup> L'enunciato preciso, dimostrato in [3] è che, se  $b_t^\theta(p)$  denota il punto raggiunto dopo tempo  $t$  da una traiettoria che parte da  $p$  in direzione  $\theta$  (ed è ben definita, cioè non urta nessun *angolo* degli ostacoli rettangolari),  

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log d(p, b_t^\theta(p))}{\log t} = \frac{2}{3}.$$

Alla base di queste recenti svolte nella nostra comprensione del modello di Ehrenfest c'è di nuovo il collegamento con la dinamica di Teichmüller, che cercheremo di spiegare nelle prossime sezioni (si veda in particolare la sezione 10).

## 7. – Srotolando...

Torniamo ai tavoli quadrati (o rettangolari). Una differenza fondamentale fra il tavolo di Sinai, con un ostacolo circolare, e uno con un ostacolo quadrato (che chiameremo tavolo di Ehrenfest, visto che rappresenta una cella del modello di Ehrenfest) si vede subito. Mentre nel tavolo di Sinai la diffrazione di un fascio di traiettorie parallele *apre* il raggio in un *continuo* di direzioni diverse (come in figura 9(a)), sul tavolo di Ehrenfest, come anche nel classico tavolo rettangolare, una palla viaggia in al più 4 direzioni diverse. Infatti, se la traiettoria iniziale forma un angolo  $\theta$  con l'orizzontale (diremo in seguito per brevità che viaggia in *direzione*  $\theta$ ), dopo ogni riflessione la direzione è sempre una tra  $\theta, -\theta, \frac{\pi}{2} - \theta$ , o  $\frac{\pi}{2} + \theta$ . Si tratta di una conseguenza del fatto che il gruppo delle (parti lineari delle) riflessioni del quadrato rispetto ai lati ha 4 elementi. Questa proprietà può essere usata proprio per semplificare lo studio delle traiettorie e passare dal mondo dei biliardi a quello delle superfici, attraverso l'*unfolding* (o srotolamento).

Per studiare le traiettorie in un biliardo quadrato (o rettangolare), un trucco semplice ma brillante è quello di *srotolare* la traiettoria (una procedura che viene chiamata *unfolding* in inglese). L'idea, un po' come nella massima "se la montagna non va da Maometto...", è quella di riflettere non la traiettoria, bensì il tavolo stesso! Così, la palla, dopo ogni impatto con il bordo, anziché muoversi lungo la direzione riflessa, prosegue dritta (*attraverso* il bordo), in una nuova copia del tavolo ottenuta per riflessione (come in Figura 13(b)). Ci riduciamo così ad una traiettoria rettilinea che attraversa una griglia quadrata. Abbiamo visto però che una traiettoria può assumere come abbiamo visto solo 4 direzioni, o equivalentemente ci sono solo 4 tipi di orientazione possibili (come si vede in figura 13(a)). È dunque possibile scegliere solo quattro copie, una

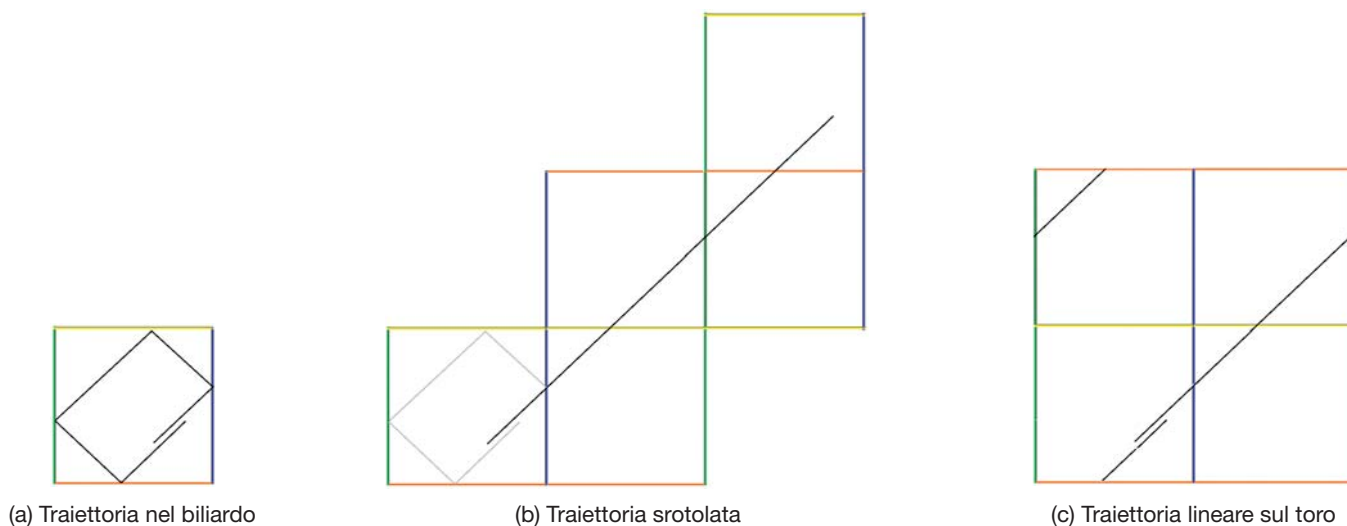


Fig. 13. – L'*unfolding* o “srotolamento” di una traiettoria del biliardo nel quadrato.

per orientazione (ad esempio le 4 che formano un quadrato  $2 \times 2$  in figura 13(c)), e riportare i pezzi di traiettoria che attraversano copie con la stessa orientazione (quelli che prima dello srotolamento viaggiavano nella stessa direzione in figura 13(a)) sulla corrispondente copia in figura 13(c). In questa rappresentazione, quando la palla esce dai bordi del tavolo formato da 4 quadrati in figura 13(c), rientra nel punto corrispondente del lato parallelo. Se incolliamo (identificando tramite traslazioni) i lati opposti del quadrato, otteniamo la superficie di un toro, cioè una superficie di genere uno, come quella di una ciambella (si veda figura 14). Il moto della palla da biliardo diventa dunque un moto *lineare* sul toro, le cui traiettorie sono illustrate in figura 14.

Grazie al trucco dello srotolamento, e alla riduzione di un moto sul toro, diventa ora possibile classificare i comportamenti qualitativi che una traiettoria del biliardo nel quadrato può avere: se la pendenza della traiettoria (cioè l'angolo formato dalla direzione del moto con l'orizzontale) è *razionale*, la traiettoria si chiude (sia quella originale nel biliardo, sia quella srotolata sulla ciambella) e il moto è dunque periodico. Se invece la pendenza è *irrazionale*, si può mostrare che la traiettoria è *densa* sul tavolo, e dunque la palla passerà arbitrariamente vicino ad ogni punto del tavolo da biliardo. Ecco perché è “noioso” giocare sul rettangolo, ed è ora di passare ad altri poligoni.

## 8. – Biliardi razionali e superfici piatte



Fig. 14. – Una traiettoria *lineare* sulla superficie del toro (si ringrazia Andrea Gambassi).

La procedura di *srotolamento* si può effettuare per ogni biliardo poligonale, ma è specialmente utile per i biliardi così detti *razionali*: se il tavolo è un poligono senza ostacoli al suo interno (cioè è semplicemente connesso), viene chiamato *razionale* quando tutti gli angoli sono multipli razionali di  $\pi$ , cioè hanno la forma  $\frac{p}{q}\pi$ , dove  $p, q$  sono interi e  $q$  non nullo. Più in generale, un biliardo poligonale è *razionale* se e solo se il gruppo  $G$  generato dalle (parti lineari delle) riflessioni rispetto ai lati è finito. Ad esempio, il quadrato ha angoli tutti della forma  $\pi/4$  e il gruppo  $G$  ha 4 elementi (è il gruppo *diedrale*  $\mathbb{D}_4$ ).

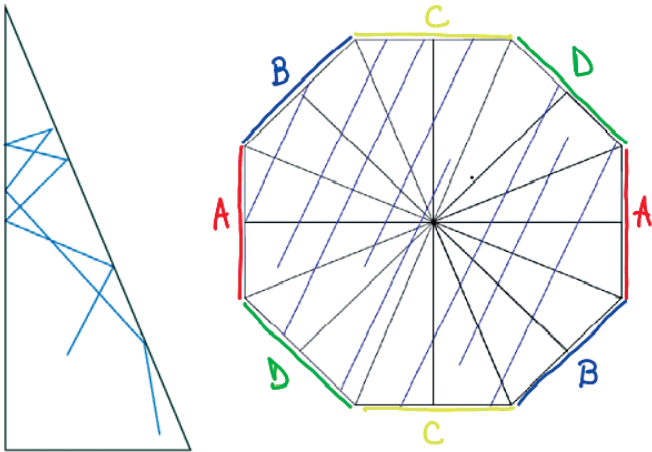


Fig. 15. – *Unfolding* di un triangolo rettangolo con angolo  $\pi/8$ .

Se il gruppo  $G$  ha  $N$  elementi, basta infatti considerare  $N$  copie  $P_1, \dots, P_N$  del tavolo  $P$ , ciascuna orientata come l'immagine del tavolo iniziale per una delle riflessioni (cioè  $P_i = r_i P$  dove  $r_i$  è la riflessione rispetto ad uno dei lati  $s_i$  di  $P$ )<sup>(7)</sup>. La traiettoria srotolata si può disegnare su queste  $N$  copie. In figura 15 è illustrato l'*unfolding* di un biliardo in un triangolo rettangolo con un lato acuto di  $\pi/8$ . In questo caso servono 16 copie, che si possono disporre a formare un ottagono regolare. Incollando i lati opposti (identificando via traslazioni) otteniamo in questo caso una superficie di genere 2 (una ciambella – o meglio pretzel – a due buchi) come in figura 16.

Se partiamo dal tavolo di Ehrenfest, servono 4 copie come nel caso del quadrato (ricordiamo che una traiettoria viaggia in solo 4 direzioni possibili). Ci si può convincere (per esempio calcolando la caratteristica di Eulero-Poincaré) che dopo gli incollamenti (descritti nella nota a piè pagina) l'*unfolding* mostrato in figura 17 produce in questo caso una superficie di genere 5.

Le superfici che abbiamo ottenuto sono esempi di superfici *piatte*: siccome sono ottenute “incollando”

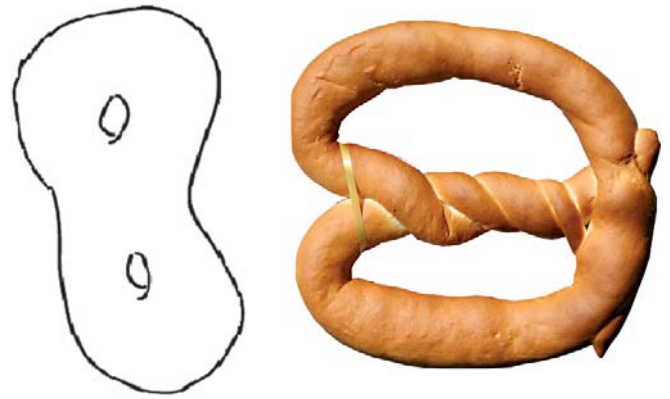


Fig. 16. – Superficie di genere 2.

fra di loro poligoni, ereditano dal piano una metrica Euclidea (definita in tutti i punti tranne i vertici, che danno origine a delle singolarità). Un esempio di superficie “piatta” è quella di un cubo, le cui facce sono quadrati e i vertici singolarità. Nel nostro caso, oltre ad una metrica piatta, siccome gli incollamenti dei lati avvengono tramite traslazioni, è ben definita anche la nozione di *direzione* e le superfici che otteniamo con l'*unfolding* sono esempi di *superfici di traslazione*<sup>(8)</sup> Esiste una definizione equivalente di superficie di traslazione su cui non ci soffermiamo

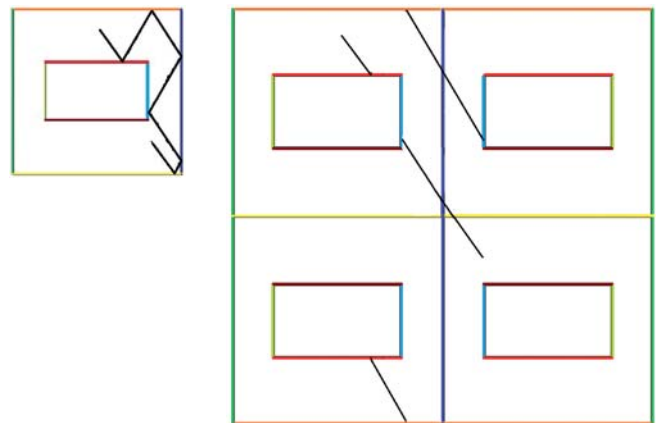


Fig. 17. – *Unfolding* del tavolo di Ehrenfest.

<sup>(7)</sup> Le identificazioni dei lati vanno fatti ricordandosi che se una traiettoria urta il lato  $s$  della copia  $P_i$  del tavolo ed  $r$  è la riflessione rispetto a  $s$ , continua il suo moto nella stessa direzione nella copia  $P_j$  tale che  $P_j = rP_i$ . Per ottenere una superficie, identifichiamo dunque il lato  $s$  di  $P_i$  con il corrispondente lato (cioè l'immagine del lato  $s$  sotto la riflessione  $r$ ) della copia  $P_j$ .

<sup>(8)</sup> In una superficie di traslazione, ciascuna singolarità della metrica è una singolarità conica con l'angolo conico della forma  $2\pi k$  con  $k$  intero positivo, cioè la metrica si può scrivere in coordinate polari  $(r, \theta)$  attorno all'origine come  $ds^2 = dr^2 + 2\pi k \sin(\theta) d\theta$ . La singolarità ha come modello l'angolo di un cono con un *eccesso* di curvatura (nel solito cono gelato l'angolo totale è  $2\pi\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$ ) e siccome  $k$  è intero è un rivestimento del piano ramificato del piano a  $k$  fogli.

qui, come dato di una struttura di superficie di Riemann e di un differenziale olomorfo  $\eta$  (che localmente ha la forma  $f(x)dz$  per qualche funzione olomorfa  $f$ , si veda per esempio il survey [20] per una spiegazione intuitiva dell'equivalenza fra queste definizioni).

Su una superficie piatta, possiamo definire la nozione di *traiettorie rettilinea* o *lineare* di un punto in una direzione  $\theta$  data: in ciascun poligono, il punto si muove lungo una retta in direzione  $\theta$  (e queste traiettorie sono geodetiche per la metrica piatta). Attraverso il procedimento di *unfolding*, ogni traiettoria del biliardo in un poligono razionale diventa una traiettoria lineare su una superficie piatta. Così abbiamo ridotto lo studio dei biliardi razionali allo studio delle traiettorie lineari (che sono orbite di *flussi*) su superfici di traslazione.

Quale è il vantaggio di passare al mondo delle superfici? Nel caso del quadrato, srotolando la traiettoria siamo riusciti a classificare il comportamento delle traiettorie (chiuse o dense). Quasi tutti i risultati che conosciamo sui biliardi razionali sono stati tutti dimostrati passando per le superfici. L'esempio forse più celebre è il seguente risultato, dimostrato da Kerckhoff, Masur e Smillie negli anni Ottanta, che stabilisce quale è il comportamento di una traiettoria *tipica* del biliardo in un poligono razionale  $P$ . Per ogni punto  $p$  in  $P$ , per *quasi-ogni* angolo  $\theta$  (cioè se scegliamo l'angolo a caso), la traiettoria del biliardo che parte da  $p$  in direzione  $\theta$  è densa ed è *distribuita uniformemente*, cioè la proporzione di tempo che la traiettoria spende in ogni sottoinsieme  $E$  (misurabile) del tavolo da biliardo  $P$  è proporzionale all'*area* di  $E$ . Questo teorema è stato dimostrato prima da Masur [20] per le traiettorie dei *flussi lineari* su una superficie di traslazione (compatta) scelta a caso. Allo stesso modo altri risultati, come l'esistenza di una traiettoria *chiusa* (e dunque periodica) sono stati dimostrati prima per le superfici di traslazione generiche e poi in ogni poligono razionale. È passando per le superfici che si è anche riusciti a mostrare l'esistenza di traiettorie *dense*, ma *non* equidistribuite (come quella in figura 5) e che, anche se queste ultime sono *rare* (cioè di misura nulla), ce ne sono spesso comunque *molte* (nel senso della dimensione di Hausdorff, si veda [21]).

Il motivo per cui è più *facile* dimostrare risultati in questo mondo di superfici è che ci sono strumenti

astratti (come in particolare la *rinormalizzazione* menzionata nella sezione 10) che non abbiamo a disposizione nel mondo dei biliardi e che spesso permettono di mostrare che una superficie di traslazione scelta a caso gode di certe proprietà. Il prezzo da pagare però è che, siccome non tutte le superfici di traslazione sono *unfolding* di biliardi (anzi, quelle che vengono da biliardi, avendo molte simmetrie interne, sono rare<sup>(9)</sup>), mostrare che quello che vale per una superficie a caso vale anche per i biliardi razionali richiede uno sforzo aggiuntivo (e non è sempre facile o possibile). Ad esempio, in una superficie di traslazione sappiamo *contare* le traiettorie periodiche, cioè sappiamo che il numero di traiettorie periodiche di lunghezza al più  $L$  cresce asintoticamente come  $cL^2$ . Questo risultato invece è tuttora non dimostrato in generale nei biliardi razionali. Con l'eccezione di alcuni biliardi ricchi di simmetrie, il risultato migliore a tutt'oggi noto è che la crescita quadratica delle orbite chiuse è vera *in media* (si veda [4], § 2.6) e utilizza il teorema di Maryam Mirzakhani e Alex Eskin noto come "la *bacchetta magica*" (che il lettore interessato può trovare esposto in [30]).

## 9. – Ergodicità nei biliardi

Il teorema di Kerckhoff, Masur e Smillie menzionato in sezione 8 è un risultato fondamentale nello studio delle proprietà caotiche dei biliardi perché riguarda più precisamente l'*ergodicità* dei biliardi razionali. L'essere *ergodico* è una delle definizioni matematiche di comportamento caotico, introdotta per dare fondamento rigoroso alla cosiddetta *ipotesi ergodica di Boltzmann*. L'idea introdotta da L. Boltzmann a fine Ottocento è che, in un sistema sufficientemente *caotico*, se misuriamo un'osservabile (come una quantità di interesse fisico) lungo una traiettoria

<sup>(9)</sup> Le superfici di traslazione ottenute per *unfolding* da un biliardo razionale hanno *misura nulla*. La misura sullo spazio (dei moduli delle) superfici di traslazione è data da quelle che si chiamano *coordinate periodo*: se la superficie è descritta da poligoni incollati, *quasi-ogni* superficie vuole dire essenzialmente per *quasi-ogni* scelta nel piano di vettori che generano i poligoni.

scelta a caso, la media *temporale* dell'osservabile coinciderà con il valor medio (o media *spaziale*) dell'osservabile. Nell'esempio del biliardo (rettangolare o più in generale razionale), se scegliamo una regione  $R$  di un tavolo da biliardo razionale (e prendiamo come osservabile la funzione caratteristica  $\chi_R$ ), la *media temporale* è la proporzione del tempo fra  $[0, T]$  passato dalla traiettoria dentro  $R$ , mentre la *media spaziale* è l'area della regione<sup>(10)</sup>. È proprio per garantire la validità dall'ipotesi di Boltzmann che è stata introdotta la nozione di *ergodicità*.

Nella branca dei sistemi dinamici nota come *teoria ergodica* (in cui vengono studiati i sistemi che *preservano una misura*), i sistemi *ergodici* giocano un po' il ruolo dei numeri primi in teoria dei numeri. Innanzitutto sono *indecomponibili* (dal punto di vista metrico-dinamico), cioè non possono essere decomposti in sottoinsiemi *invarianti* per il moto (cioè sottoinsiemi tali che se un punto  $p$  vi appartiene, vi appartiene anche tutta la traiettoria di  $p$ ), a meno che non si tratti di insiemi invarianti *banali* (cioè invisibili agli occhi della misura invariante)<sup>(11)</sup>. Si può mostrare inoltre che i sistemi ergodici costituiscono i *mattoni* in cui possono essere decomposti tutti gli altri sistemi studiati in teoria ergodica.

I biliardi iperbolici, come il biliardo di Sinai, sono esempi di biliardi ergodici, o indecomponibili quando considerati come sistemi dinamici definiti nello spa-

*zio delle fasi*, dato da posizione sul tavolo e velocità della particella. Ne segue dall'ipotesi di Boltzmann (o meglio dal teorema di Birkhoff, si veda la nota 9) che la traiettoria tipica di un biliardo iperbolico è *densa* nello spazio delle fasi, cioè arriva arbitrariamente vicino ad ogni punto e *in ogni direzione*.

Anche i biliardi nei poligoni razionali sono ergodici, ma in un senso meno forte: il teorema di Kerkhoff, Masur e Smillie garantisce che per quasi tutte le scelte di direzioni iniziali della traiettoria del biliardo, il moto della traiettoria srotolata sulla superficie ottenuta per *unfolding* è ergodico<sup>(12)</sup>. Se ne deduce che la traiettoria tipica in un biliardo poligonale razionale è densa nello *spazio delle configurazioni*, cioè arriva arbitrariamente vicino ad ogni punto *del tavolo* (segue dal fatto che la corrispondente traiettoria srotolata riempie densamente la superficie di *unfolding*). Siccome però ogni traiettoria in un biliardo razionale assume solo un numero finito di direzioni (come già osservato per il quadrato in § 7 e più in generale in § 8), nessuna traiettoria può essere densa nello spazio delle fasi (lo spazio delle fasi è infatti *foliato* in superfici invarianti, tanto che questi biliardi sono chiamati alle volte *quasi-integrabili*, o *pseudo-integrabile* nella terminologia introdotta da Sir Michael Berry).

È naturale chiedersi se il risultato di ergodicità Kerkhoff, Masur e Smillie valga anche per biliardi razionali infiniti, magari periodici come il modello di Ehrenfest (o se il risultato di Masur-Smillie valga per superfici di traslazione *non compatte*, ma ad esempio di area finita). Ci sono vari risultati recenti che mostrano ergodicità in alcuni esempi di biliardi razionali periodici (e anche generalizzazioni del teorema di Masur-Smillie). Nel lavoro con K. Frączek [6] già menzionato in sezione 6, abbiamo però dimostrato

<sup>(10)</sup> In generale, sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio misurabile dove  $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra e  $\mu$  una misura. Sia  $\varphi_t : X \rightarrow X$  un *flusso* (cioè un'azione di  $\mathbb{R}$ ) che preserva la misura  $\mu$ , cioè tale che per ogni  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . La formulazione rigorosa moderna dell'ipotesi ergodica di Boltzmann si traduce nel teorema di Birkhoff, che asserisce che se  $\mu$  ha massa totale finita e  $\varphi_t$  è *ergodico* (si veda la nota 11 per la definizione), per ogni funzione integrabile  $f \in L^1(\mu)$  e per  $\mu$ -quasi ogni condizione iniziale  $x \in X$ , la media temporale  $\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$  converge, per  $T$  che va all'infinito, alla *media spaziale* data da  $\int_X f d\mu$ .

<sup>(11)</sup> Più precisamente, un flusso  $\varphi_t : X \rightarrow X$  definito sullo spazio misurato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e che preserva la misura  $\mu$  è *ergodico* se per ogni insieme  $A \in \mathcal{A}$  tale che  $\varphi_t(A) = A$  per ogni  $t$ , o  $\mu(A) = 0$ , oppure  $\mu(A^c) = 0$  (dove  $A^c$  denota il complementare di  $A$ ). Si noti che questa definizione si applica anche a flussi che preservano una misura *infinita*.

<sup>(12)</sup> Un flusso lineare su una superficie piatta preserva l'area Euclidea, ereditata dai poligoni nel piano. L'ergodicità del flusso lineare in questo caso significa che gli unici insiemi invarianti hanno *area nulla*, oppure il loro complementare ha *area nulla*. L'ergodicità di un biliardo in un poligono razionale può equivalentemente essere formulata rispetto ad una misura invariante che è supportata su una superficie di *unfolding*: per quasi ogni angolo  $\theta$ , il flusso del biliardo è ergodico rispetto alla misura data dal prodotto dell'area Euclidea sul tavolo da biliardo per una misura discreta concentrata sull'orbita (finita) di  $\theta$  rispetto al gruppo  $G$  delle (parti lineari delle) riflessioni.

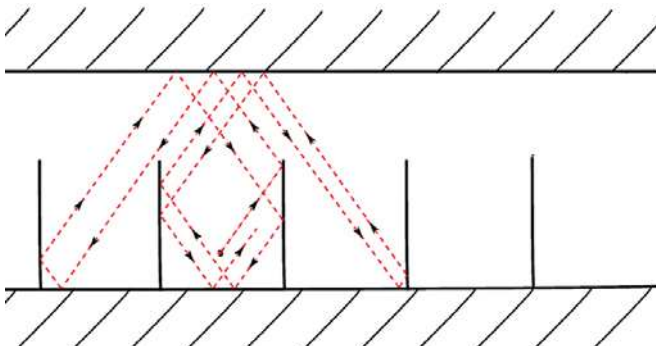


Fig. 18. – Tubo con barriere ripetute periodicamente, noto come “*perfect retroreflector*” (immagine tratta da [7]).

un criterio di *non-ergodicità*, che si applica a vari esempi di biliardi razionali periodici, tra cui in particolare al modello di Ehrenfest. Oltre a mostrare che non esistono traiettorie dense (nel biliardo), dimostriamo infatti che il modello di Ehrenfest non è ergodico, e fallisce di essere ergodico in un modo molto drastico<sup>(13)</sup>. Altri esempi di biliardi periodici a cui il nostro risultato si applica includono per esempio il *tubo* con barriere ripetute periodicamente illustrato in figura 18, noto anche come *perfect retroreflector* (perché può essere usato per invertire il una componente del senso moto di una traiettoria). In questo caso, anche se di nuovo il moto fallisce di essere ergodico per quasi ogni scelta di angolo iniziale, in [7] abbiamo costruito esplicitamente un’infinità di direzioni *eccezionali*, per cui invece dimostriamo che ogni traiettoria infinita è densa e il biliardo è ergodico. Le tecniche matematiche usate per dimostrare questi risultati sfruttano risultati di teoria ergodica infinita, ma anche strumenti che vengono dalla dinamica di Teichmüller, a cui ora cercheremo di accennare.

## 10. – La rinormalizzazione di Teichmüller

L’idea alla base della dimostrazione dell’ergodicità dei biliardi razionali è a mio (e non solo mio) parere affascinante e *bella*, della *bellezza* di cui gode una

<sup>(13)</sup> Ogni misura invariante può essere decomposta in misure invarianti ergodiche. Nel caso di Ehrenfest, dimostriamo infatti in [6] che la misura invariante naturale (la misura di Lebesgue sul tavolo da biliardo) si decompone in un numero non numerabile di misure ergodiche (tutte assolutamente continue).

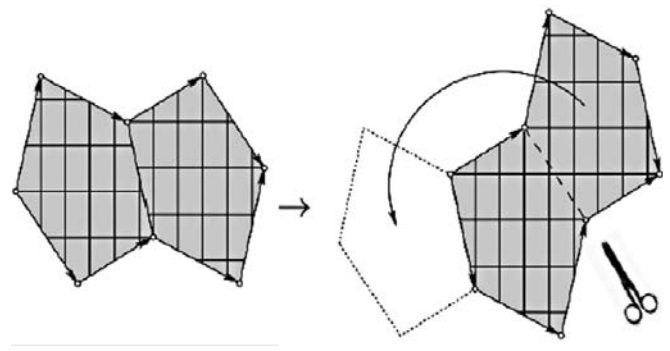


Fig. 19. – Un’operazione di “taglia e incolla” (si ringrazia Anton Zorich per questa immagine, tratta da [29]).

dimostrazione matematica che scopre un legame tra due mondi che sembrano a priori assolutamente diversi. Vogliamo studiare le traiettorie in una direzione fissata, su una superficie di traslazione fissata (ottenuta per sempio srotolando un biliardo razionale). Non sembra forse la cosa più naturale, ma andiamo invece a costruire un mondo diverso, lo spazio di tutte le superfici di traslazione. Per essere precisi, consideriamo lo spazio dei *moduli*<sup>(14)</sup>, in cui dichiariamo due superfici di traslazione *equivalenti* (cioè “uguali”) se possiamo *tagliare* i poligoni che definiscono l’una, spostarli nel piano usando solo traslazioni, e *ri-incollarli* in quelli che definiscono l’altra, come illustrato in figura 19. Prendiamo dunque la nostra superficie e direzione, che è un *punto* di questo spazio astratto, e iniziamo a muoverci nello spazio, *deformando* la metrica piatta della superficie da cui siamo partiti.

La famiglia di deformazioni è semplice da descrivere, e consiste nel *rimpicciolire* le traiettorie nella direzione che ci interessa e contemporaneamente *allungare* dello stesso fattore quelle ortogonali (per preservare l’area). Se la direzione che ci interessa è la verticale, la deformazione al tempo  $t$  si ottiene applicando a tutti i poligoni che incollati danno la superficie iniziale nel piano la matrice  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ ,

<sup>(14)</sup> Per i geometri algebrici o i topologi fra i lettori, lo spazio dei moduli delle superfici piatte (che come abbiamo già detto sono superfici di Riemann con un differenziale olomorfo) è una sezione di un fibrato sullo spazio dei moduli delle superfici di Riemann. Si può dimostrare che è un *orbifold* complesso la cui dimensione dipende dal genere della superficie e dal numero e ordine delle singolarità coniche della metrica piatta.



che riscalda l'orizzontale per un fattore  $e^t$  e la verticale per un fattore inverso  $1/e^t$ , e re-incollandoli via traslazioni (lati paralleli restano paralleli) per ottenere la superficie deformata a tempo  $t$ . Questa famiglia di deformazioni è nota come *flusso (geodetico) di Teichmüller* (perché muove la superficie lungo una geodetica rispetto alla metrica di Teichmüller sullo spazio dei moduli). Può sembrare a prima vista una deformazione banale (e lo è sui poligoni nel piano), ma bisogna ricordarsi che vive nello spazio delle superfici e che poligoni che possono essere tagliati e incollati rappresentano la stessa superficie. Masur [20] e, contemporaneamente, Veech [28] hanno dimostrato che il flusso di Teichmüller è *ergodico* e in particolare una deformazione tipica sarà densa nello spazio dei moduli.

Questa deformazione è utile per studiare il comportamento di lunghe traiettorie del biliardo perché, accorciandole, permette di *zoomare indietro* e vederle come traiettorie di lunghezza fissata, ma su un'altra superficie. Fornisce così lo strumento per effettuare quella che in sistemi dinamici si chiama *rinormalizzazione*. La filosofia che ha permesso di dimostrare molti risultati sulle superfici piatte ha guidato la ricerca nell'area nota come *dinamica di Teichmüller* è che le proprietà dinamiche delle traiettorie sulla superficie di partenza possono essere dedotte dal comportamento della deformazione di Teichmüller (che ora chiameremo *rinormalizzazione di Teichmüller*).

Il prototipo di questo *ponte* fra i due mondi è il *criterio di Masur*, che è al cuore del risultato di ergodicità dei biliardi piatti: se la deformazione di Teichmüller è ricorrente, cioè la superficie deformata ritorna arbitrariamente vicino alla superficie iniziale, questo si può usare per mostrare che il moto sulla superficie iniziale è ergodico. Siccome sappiamo che una deformazione tipica è densa (per ergodicità del flusso di Teichmüller), e dunque ricorrente, ne segue che il moto lineare su una superficie piatta tipica è ergodico. (Per arrivare ai biliardi razionali, bisogna poi mostrare che la rinormalizzazione è ricorrente anche a partire da ogni superficie di traslazione, per *quasi ogni* direzione). Il criterio di Masur ha dato inizio alla dinamica di Teichmüller ed è solo il primo di tanti altri *ponti* che legano traiettorie lineari su superfici piatte e deformazioni nello spazio di Teichmüller.

## 11. – Superfici infinite ed esponenti di Lyapunov

E i biliardi infiniti? Per ora abbiamo *srotolato* solo biliardi razionali in poligoni *limitati* e ottenuto superfici di traslazione *compatte*. Se partiamo da un biliardo poligonale *periodico*, come quello di Ehrenfest, possiamo ripetere la stessa procedura di *unfolding* (prendendo un numero finito di copie del piano, 4 nel caso di Ehrenfest, e identificandone i lati attraverso traslazioni). Si osservi che il modello di Ehrenfest è fatto di copie (incollate fra loro) del biliardo di Ehrenfest nel quadrato. Possiamo indicizzare le copie con un vettore  $(n, m)$  con  $n, m$  interi. Ricordiamo (si veda la sezione 8) che se facciamo l'*unfolding* di una (e ciascuna) delle copie (un biliardo quadrato con un ostacolo quadrato) otteniamo una superficie di traslazione di genere 5 (compatta) che chiameremo  $S$  (come quella in basso in figura 20). La superficie che otteniamo

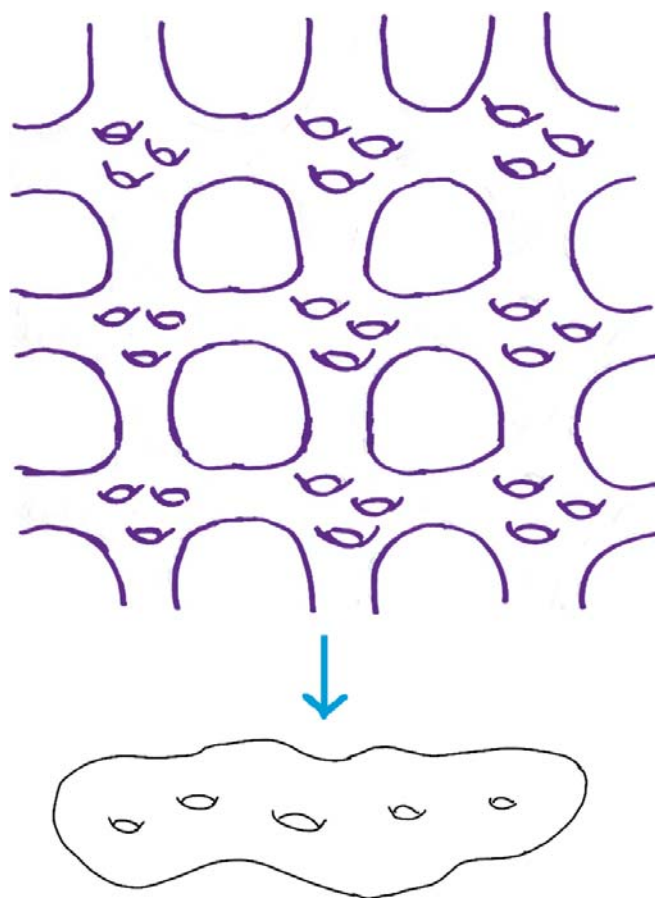


Fig. 20. – La superficie periodica di Ehrenfest (che ne ricopre una di genere 5).

facendo l'*unfolding* del biliardo nel piano è dunque una superficie *infinita* ma periodica, come quella in alto in figura 20. Inoltre, la superficie infinita è un *rivestimento* periodico della superficie  $S$ , cioè ogni punto sulla superficie infinita può essere indicizzato da un punto sulla superficie  $S$  e da un vettore  $(n, m)$  come sopra (e in più il rivestimento rispetta la metrica piatta).

Per sapere come si muove una palla nel biliardo di Ehrenfest, dobbiamo studiare una traiettoria lineare su questa superficie infinita periodica. Dobbiamo dunque sapere non solo come si comportano le traiettorie lineari sulla superficie compatta di genere 5, che chiameremo  $S$ , ma anche in quale delle *copie* della superficie (indicizzate come sopra dalle coppie di interi in  $\mathbb{Z}^2$ ) ci troviamo ad ogni istante. Quest'informazione è codificata da quante volte la traiettoria lineare sulla superficie compatta  $S$  interseca certe *curve chiuse* su  $S$  (come segue dalla teoria dei rivestimenti): ogni volta che la traiettoria su  $S$  attraversa queste *curve traguardo*, la traiettoria sulla superficie periodica cambia copia.

La rinormalizzazione ci viene di nuovo in aiuto per studiare questi numeri di intersezione. Applicando la rinormalizzazione di Teichmüller alla superficie (compatta)  $S$ , si può studiare come questa agisce sulle curve o meglio, sull'*omologia*. Si noti che stiamo usando sempre la rinormalizzazione sulle superfici compatte, ma studiandone aspetti diversi. È cruciale qui che la superficie infinita cui siamo interessati sia *periodica*. (Come vedremo nella prossima sezione, non abbiamo purtroppo una buona rinormalizzazione sulle superfici non periodiche.) Il *ponte tra i due mondi* che si scopre in

questo caso è che l'esponente di superdiffusione del modello di Ehrenfest, cioè  $2/3$  (vedi sopra) coincide con un'*esponente di Lyapunov* del flusso di Teichmüller. E questi esponenti di Lyapunov giocano anche un ruolo cruciale nella dimostrazione di non ergodicità... ma questo è appena l'inizio di un'altra storia, troppo tecnica per questo articolo. I lettori interessati troveranno degli spunti di approfondimento in sezione 13.

## 12. – Misteri irrisolti.

Per concludere, fatemi sottolineare che nonostante tutto quello che ora sappiamo sui biliardi, ci sono tanti misteri ancora da risolvere, o tante *domande aperte*. L'ergodicità nel mondo dei biliardi razionali *periodici* (o in quello delle superfici di traslazione infinite che sono rivestimenti periodici) è tutt'ora misteriosa. Abbiamo esempi di ergodicità, e criteri di *non* ergodicità, come quello dimostrato da me e Fraćzek. È curioso per esempio confrontare le tre superfici infinite periodiche rappresentate in Figura 21 (in cui i lati dello stesso colore sono incollati da traslazioni). Per quanto possano sembrare simili, nella prima (in fig. 21(a)), per quasi ogni direzione, il flusso lineare è ergodico [13]; nella seconda (in figura 21(b)) invece no (segue dal mio risultato con Fraćzek in [6]), mentre nella terza (in figura 21(c)) è di nuovo ergodico (è stato dimostrato in [24]), ma per un motivo fondamentalmente diverso della prima. Come ci mostra questo esempio, non è chiaro cosa aspettarsi come comportamento tipico in una superficie periodica

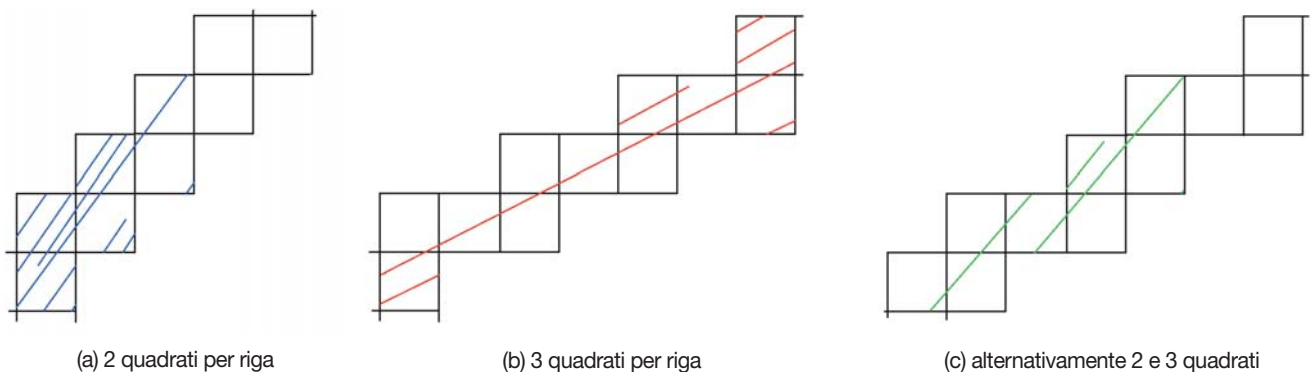


Fig. 21. – Tre superfici periodiche infinite *a scala*.

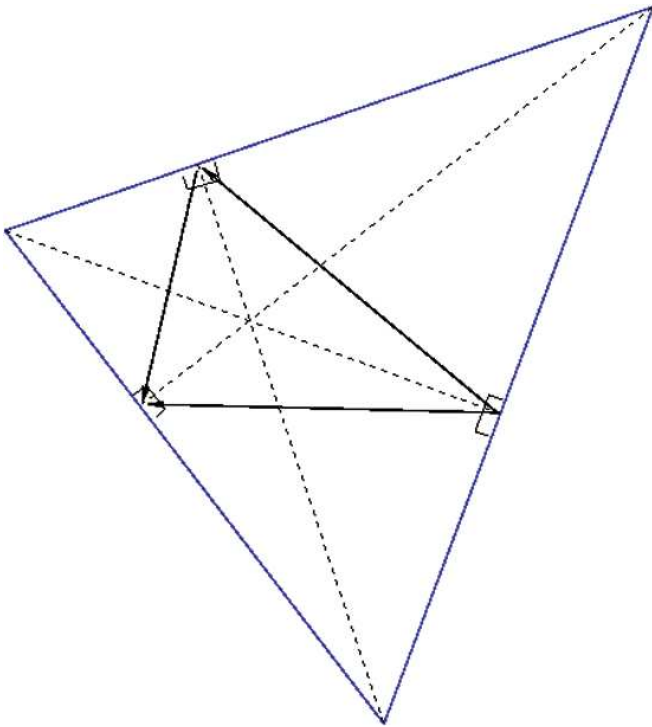


Fig. 22. – La traiettoria di Fagnano in un triangolo acutangolo.

in generale, né come discriminare ergodicità da non ergodicità. Siamo tuttora alla ricerca di una teoria comprensiva dell'ergodicità per i biliardi infiniti razionali e periodici.

Infine, la rinormalizzazione e la dinamica di Teichmüller si sono rivelate strumenti potenti per comprendere i biliardi poligonali *razionali*. Siamo però ancora terribilmente ignoranti quando ci spostiamo al mondo dei poligoni *irrazionali* (che corrispondono se vogliamo a superfici infinite ma non periodiche). Non sappiamo ad esempio nemmeno rispondere alla seguente *semplice* domanda, che si può facilmente spiegare a uno studente: esiste una traiettoria *chiusa* (equivalentemente periodica) in *ogni* biliardo in un triangolo? Sappiamo che è vero se gli angoli sono razionali. La risposta è sì anche per tutti i triangoli con angoli tutti acuti: basta un po' di geometria Euclidea per costruire una traiettoria periodica, nota come traiettoria di *Fagnano*, in ogni triangolo acutangolo, come mostrato in Figura 22.

È anche vero nei triangoli rettangoli (si veda ad esempio una traiettoria periodica in figura 23). Il meglio che sappiamo nei triangoli ottusi è che un'orbita periodica si può trovare per molti angoli con

l'aiuto del computer (si veda l'articolo [14] di Richard Schwartz e Patrick Hooper, che utilizza il programma *McBilliard* [15] per cercarla), ma questo approccio (in parte) numerico non potrà mai esaurire tutti gli angoli. Forse la risposta alla domanda se esiste sempre un'orbita periodica è semplice e ci sfugge. O forse, come nel caso del teorema di Fermat (che è pur facile da enunciare, ma la cui risoluzione ha portato a sviluppare delle teorie matematiche molto profonde), ci sono ancora molti altri *pointi* fra nuovi mondi pieni di bellezza matematica che attendono di essere scoperti Frączek.

### 13. – Per approfondire.

L'articolo segue a grandi linee la presentazione di un seminario che ho tenuto al British Mathematics colloquium del 2014 a Londra e la Public Inaugural Lecture "Billiards, pretzels and chaos" che ho tenuto a Bristol nel 2016, entrambe disponibili online [27]. La giornalista divulgativa Marianne Freiberg mi ha intervistata e ha presentato la sua versione del mio racconto in due articoli [8, 10] pubblicati sulla rivista divulgativa inglese *Plus* (che sono stati anche selezionati per il volume *Best Writing on Mathematics, 2015*, Princeton University Press); il primo articolo è stato tradotto in italiano da Anna Betti per *Xla Tangente* [9].

Per chi volesse entrare di più nella matematica, Il libro di Tabachnikov [26] (in inglese) fornisce una panoramica del mondo dei biliardi, non solo poligonali ma anche iperbolici ed ellittici. Ho scoperto preparando questo testo che il libro [12] di Graffi e Degli Esposti (in italiano) ne presenta una selezione, incluso l'*unfolding* del quadrato. Un survey introduttivo sul mondo delle superfici piate, per mate-

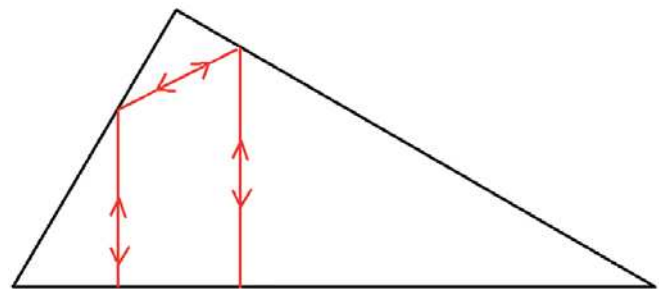


Fig. 23. – Traiettoria periodica in un triangolo rettangolo.

matici ma molto leggibile, è stato scritto da Zorich [29]. Le diverse equivalenti definizioni di superfici di traslazione sono presentate nell'articolo survey di Masur [20] e il legame coi biliardi razionali è anche trattato negli articoli introduttivi di John Smillie [25] e Masur-Tabachnikov [22]. Il “teorema della bacchetta magica” di A. Eskin e M. Mirzakhani e alcuni preliminari sullo spazio dei moduli delle superfici di traslazione sono spiegati da Zorich in [30]. Infine, il blog matematico *Disquisitiones Mathematicae* di Carlos Matheus [23] introduce e spiega le idee della dimostrazione del legame tra il coefficiente di diffusione  $2/3$  del modello di Ehrenfest e gli esponenti di Lyapunov del flusso di Teichmüller (e tanti altri temi della dinamica di Teichmüller e non solo).

## References

- [1] A. AVILA and P. HUBERT, *Recurrence for the wind-tree model* to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*.
- [2] V. DELECROIX and A. ZORICH, *Cries and whispers in wind-tree forests*, preprint arXiv:1502.06405.
- [3] V. DELECROIX, P. HUBERT and S. LELIÈVRE, *Diffusion for the periodic wind-tree model*, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **47** (2014), 1085-1110.
- [4] A. ESKIN, M. MIRZAKHANI and A. MOHAMMADI, *Isolation, equidistribution and orbit closures for the  $SL(2, R)$  action on moduli space*, *Ann. of Math. (2)* **182** (2015), 673-721.
- [5] C. DETTMANN, *Diffusion in the Lorentz Gas*, *Comm. Theoretical Physics* **62** (2014), no. 4, 521-540.
- [6] K. FRAĆZEK and C. ULCIGRAI, *Non-ergodic  $Z$ -periodic billiards and infinite translation surfaces*, *Invent. Math.* **197** (2014), 241-298.
- [7] K. FRAĆZEK and C. ULCIGRAI, *Ergodic directions for billiards in a strip with periodically located obstacles*, *Comm. Math. Phys.* **327** (2014), no. 2, 643-663.
- [8] M. FRIBERGER, *Chaos on the mathematical table*, *Plus Magazine* (2014)  
<https://plus.maths.org/content/chaos-billiard-table>
- [9] M. FRIBERGER, *Caos sul tavolo da biliardo*, traduzione di A. Betti,  
[http://www.xlatangente.it/upload/files/XlaTangente\\_04\\_online\\_ulcigrai.pdf](http://www.xlatangente.it/upload/files/XlaTangente_04_online_ulcigrai.pdf)
- [10] M. FRIBERGER, *Playing billiards on doughnuts*, *Plus Magazine* (2014)  
<https://plus.maths.org/content/billiards-donuts>
- [11] S. GLASHOW and L. MITTAG, *Three rods on a ring and the triangular billiard*, *J. Statist. Phys.* **87** (1997), no. 3-4, 937-941.
- [12] S. GRAFFI, M. DEGLI ESPOSTI, *Fisica Matematica Discreta*, Unitext (2008).
- [13] P. HOOPER, P. HUBERT and B. WEISS, *Dynamics on the infinite staircase*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **33** (2013), no. 9, 4341-4347.
- [14] P. HOOPER and R. SCHWARTZ, *Billiards in nearly isosceles triangles.*, *J. Mod. Dyn.* **3** (2009), no. 2, 159-231.
- [15] P. HOOPER and R. SCHWARTZ, program *McBilliards* available at  
<http://www.math.brown.edu/res/Billiards/index.html>
- [16] S. KERCKHOFF, H. MASUR and J. SMILLIE, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), 293-311.
- [17] S. KERCKHOFF, H. MASUR and J. SMILLIE, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), 293-311.
- [18] C. LIVERANI *Transport in partially hyperbolic fast-slow systems*, preprint arxiv:1803.06137.
- [19] J. MARKLOF *The low-density limit of the Lorentz gas: periodic, aperiodic and random*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014*. Vol. III, 623-646, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [20] H. MASUR, *Interval exchange transformations and measured foliations*, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, 169-200.
- [21] H. MASUR and J. SMILLIE, *Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations*, *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), no. 3, 455-543.
- [22] H. MASUR and S. TABACHNIKOV, *Rational billiards and flat structures*, in *Handbook of dynamical systems*, Vol. 1A, 1015-1089, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [23] C. MATHEUS, *Diffusion in Ehrenfest wind-tree model*, in the blog *Disquisitiones Mathematicae* (posted on November 18, 2011)  
<https://matheusemss.wordpress.com/2011/11/18/diffusion-in-ehrenfest-wind-tree-model/>
- [24] D. RALSTON and S. TROUBETZKOY, *Ergodic infinite group extensions of geodesic flows on translation surfaces*, *J. Mod. Dyn.* **6** (2012), no. 4, 477-497.
- [25] J. SMILLIE, *The dynamics of billiard flows in rational polygons*, Chapter IV in *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 100. Mathematical Physics, I. Springer-Verlag, Berlin, 2000, 360-382.
- [26] S. TABACHNIKOV, *Geometry and Billiards*, Student Mathematical Library, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [27] C. ULCIGRAI, *Billiards, Pretzels... and Chaos and Mathematical billiards and Flows on Surfaces* slides presentations, available on webpage  
<https://people.maths.bris.ac.uk/maxcu/Slides.html>
- [28] W. VEECH, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, 201-242.
- [29] A. ZORICH, *Flat surfaces*, *Frontiers in number theory, physics, and geometry*. I, 437-583, Springer, Berlin, 2006 (preprint arXiv:math/0609392 available on  
<https://arxiv.org/abs/math/0609392>
- [30] A. ZORICH, *Le théorème de la baguette magique de A. Eskin et M. Mirzakhani*, *Gazette des Mathématiciens* no. 142 (2014), edited by SMF, English translation *The Magic Wand Theorem of A. Eskin and M. Mirzakhani* available on arXiv  
<https://arxiv.org/pdf/1502.05654.pdf>



Corinna Ulcigrai

*Corinna Ulcigrai è professore ordinario di Matematica Pura all'Università di Bristol, e dall'Agosto 2018, all'Università di Zurigo. Corinna è nata a Trieste nel 1980 e ha studiato alla Scuola Normale Superiore di Pisa, dove ha conseguito il Diploma di Perfezionamento assieme alla Laurea in Matematica all'Università di Pisa nel 2002. Ha ricevuto il PhD in Matematica nel 2007 presso l'Università di Princeton, negli USA, dove ha svolto il dottorato sotto la supervisione di Ya. G. Sinai (premio Abel 2014). I risultati della sua ricerca, che riguarda in particolare le proprietà caotiche di sistemi parabolici e la dinamica di Teichmüller, le hanno valso numerosi riconoscimenti internazionali, tra i quali il premio per giovani matematici della European Mathematical Society al Congresso Europeo della matematica del 2012, il 2013 Whitehead Prize della London Mathematical Society e il Leverhulme Prize nel 2014. C. Ulcigrai fa parte del comitato editoriale dei giornali della London Mathematical Society, del Journal of Modern Dynamics, delle Lecture Notes dell'UMI. È stata nella Standing Committee della European Women in Mathematics Society, 2009-2012 e supporta attività in sostegno delle donne Matematiche, come gli eventi Women in Mathematics: Opportunities for the Future, all'Università di Bristol. È mamma di due bambini piccoli. Attualmente, le sue ricerche sono supportate da uno Starting Grant dell'European Research Council di cui è titolare, dal Leverhulme Trust attraverso il Leverhulme Prize e da un Royal Society Wolfson Research Merit Award.*